IFT 615 – Intelligence Artificielle

Raisonnement probabiliste
Réseaux bayésiens

Professeur: Froduald Kabanza

Assistants: D’Jeff Nkashama

UdS Université de Sherbrooke

Sujets couverts

- C'est quoi un réseau bayésien (RB)?
  - structure d'un RB
  - calcul de probabilités dans un RB
- Indépendance conditionnelle dans un RB
- Inférence dans un réseau bayésien
  - inférence exacte
  - inférence approximative

Réseaux bayésiens

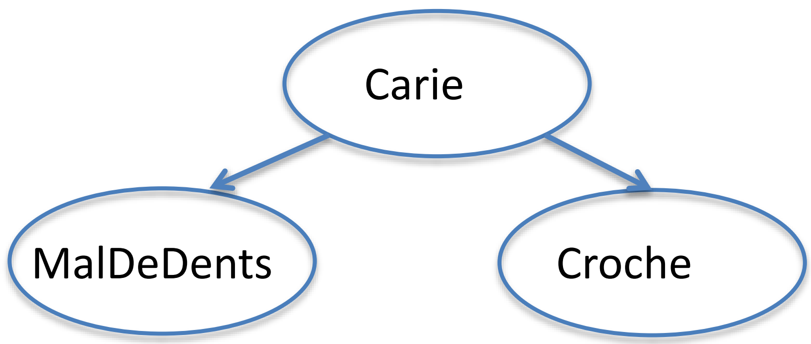
- Les **réseaux bayésiens** (RB) sont un mariage entre la théorie des graphes et la théorie des probabilités

- Un RB permet de représenter les connaissances probabilistes d'une application donnée :
  - par exemple, les connaissances cliniques d'un médecin sur des liens de causalité entre maladies et symptômes

- Les RB sont utiles pour modéliser des connaissances d'un système expert ou d'un système de support à la décision, dans une situation pour laquelle :
  - la causalité joue un rôle important (des événements en causent d'autres)
  - mais notre compréhension de la causalité des événements est incomplète (on doit recourir aux probabilités)

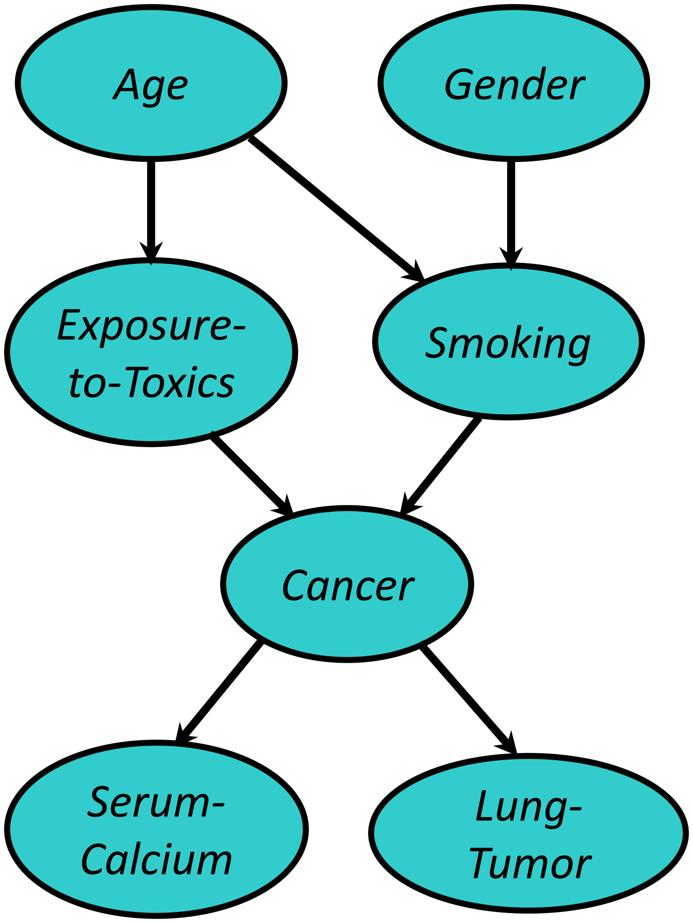
Syntaxe

- Un RB est un **graphe**
  - **orienté**
  - **acyclique**
  - dont les **nœuds sont des variables aléatoires** et
  - les **arcs** représentent
    - des **dépendances** (par exemple des causalités) probabilistes entre les variables et
    - des **distributions de probabilités conditionnelles** (locales) pour chaque variable étant donnés ses parents

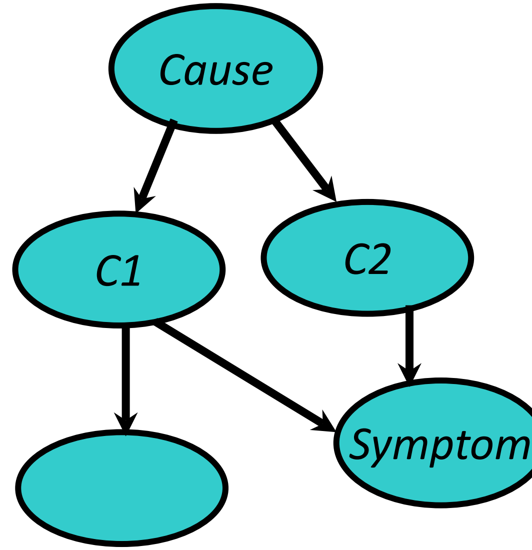


Application : diagnostique médical

- Déterminer la maladie d'un patient, sachant des symptômes
- On peut avoir une maladie mais montrer seulement un sous-ensemble des symptômes possibles



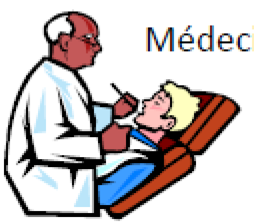
Applications



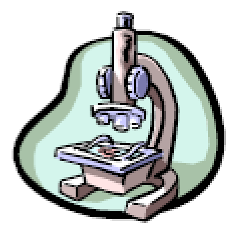
- Diagnostique : P(Causes | Symptômes)
- Prédiction : P(Symptomes | Causes)
- Classification : max P(Classe |Données)

classe

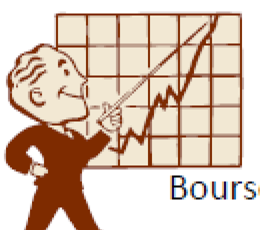
Commerce électronique



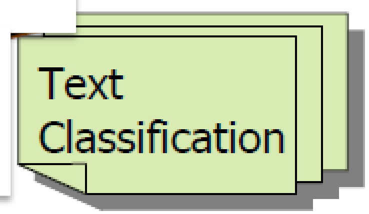
Médecine



Bio-informatique



Bourse



Diagnostique informatique

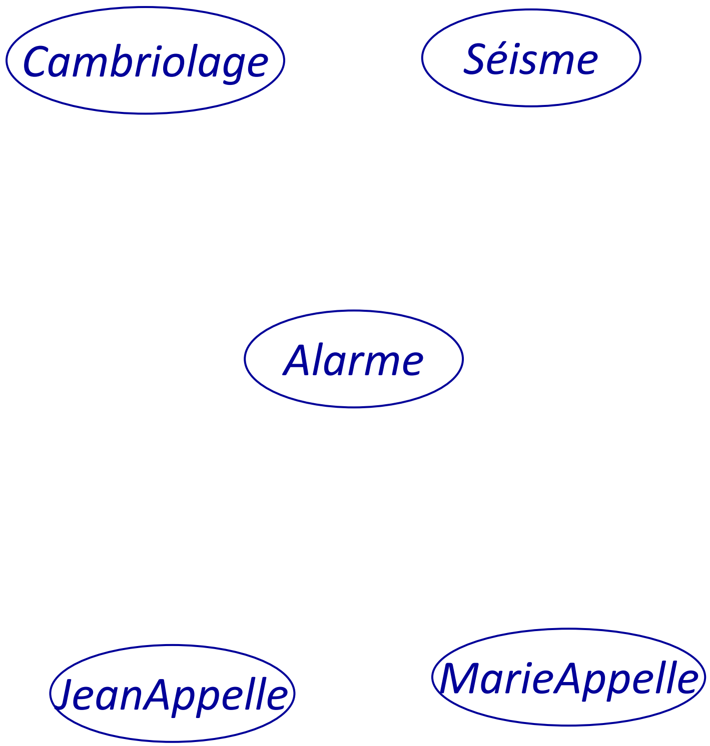
Exemple

- Considérons la situation suivante :
  - je suis au travail, et mes voisins Marie et Jean m'ont promis de m'appeler chaque fois que mon alarme sonne
  - mon voisin Jean m'appelle pour me dire que mon alarme sonne
    - » parfois il confond l'alarme avec la sonnerie du téléphone
  - par contre ma voisine Marie ne m'appelle pas toujours
    - » parfois elle met la musique trop fort
  - parfois mon alarme se met à sonner lorsqu'il y a de légers séismes
  - comment conclure qu'il y a ou non un cambriolage chez moi?

- On peut représenter ce problème par un RB

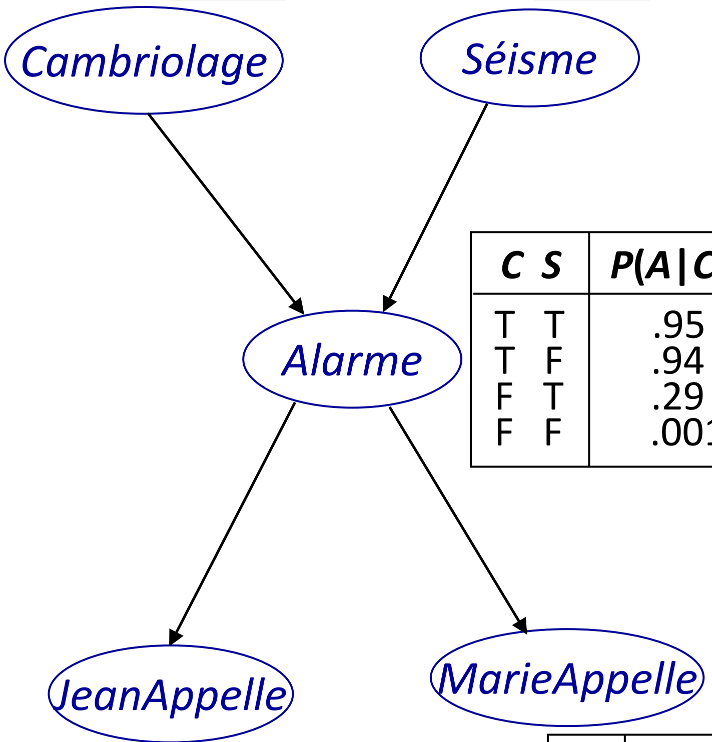
Exemple

- Variables aléatoires :
  - *Cambriolage*
  - *Séisme*
  - *Alarme*
  - *JeanAppelle*
  - *MarieAppelle*



Exemple

- La topologie du RB modélise les relations de causalité
- Un arc d'un nœud *X* vers un nœud *Y* signifie que la variable *X* **influence** la variable *Y*
  - un cambriolage peut déclencher l'alarme
  - un séisme aussi
  - l'alarme peut inciter Jean à appeler
  - idem pour Marie
- Une **table de probabilités conditionnelles** (TPC) donne la probabilité pour chaque valeur du nœud étant donnés les combinaisons des valeurs des parents du nœud (c'est l'équivalent d'une **distribution**)



P(*C*)
.001

P(*S*)
.002

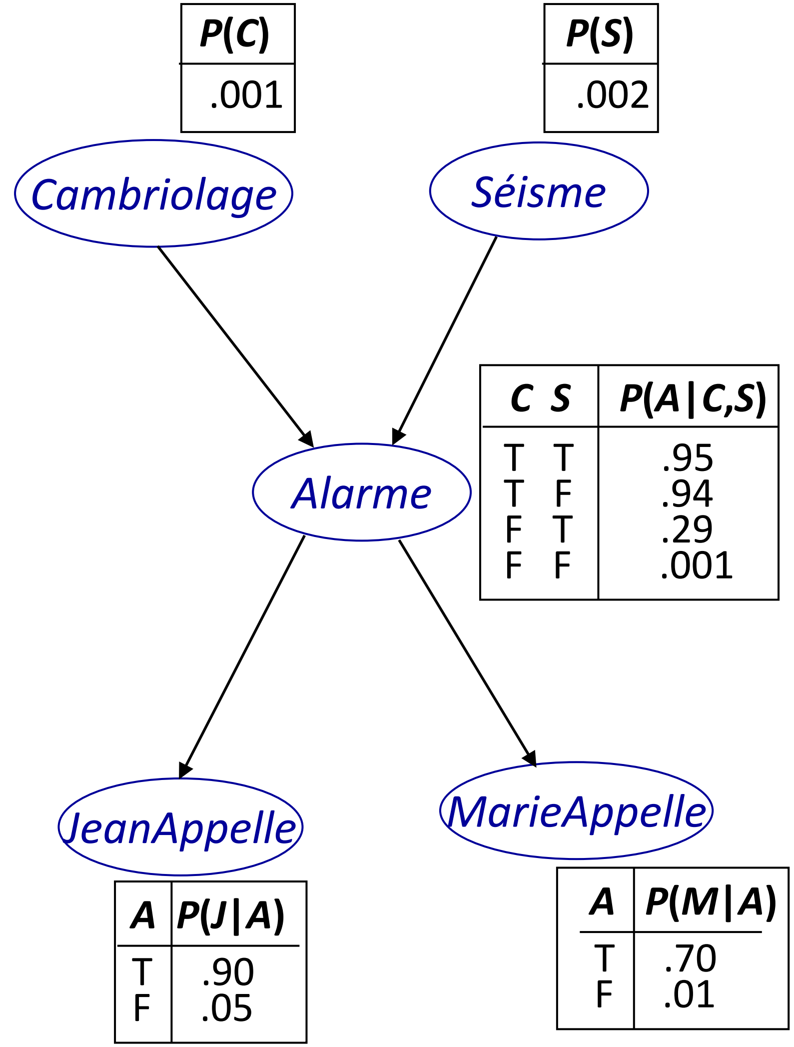
C	*S*	*P*(*A*|*C*,*S*)
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	*P*(*J*|*A*)
T	.90
F	.05

A	*P*(*M*|*A*)
T	.70
F	.01

Définitions

- S'il y a un arc d'un nœud *Y* vers un nœud *X*, cela signifie que la variable *Y* influence la variable X
  - *Y* est appelé le **parent** de *X*
  - *Parents*(*X*) est l'ensemble des parents de *X*
- Si *X* n'a pas de parents, sa distribution de probabilités est dite **inconditionnelle** ou **a priori**
- Si *X* a des parents, sa distribution de probabilités est dite **conditionnelle**



***P*(*C*)**
.001

***P*(*S*)**
.002

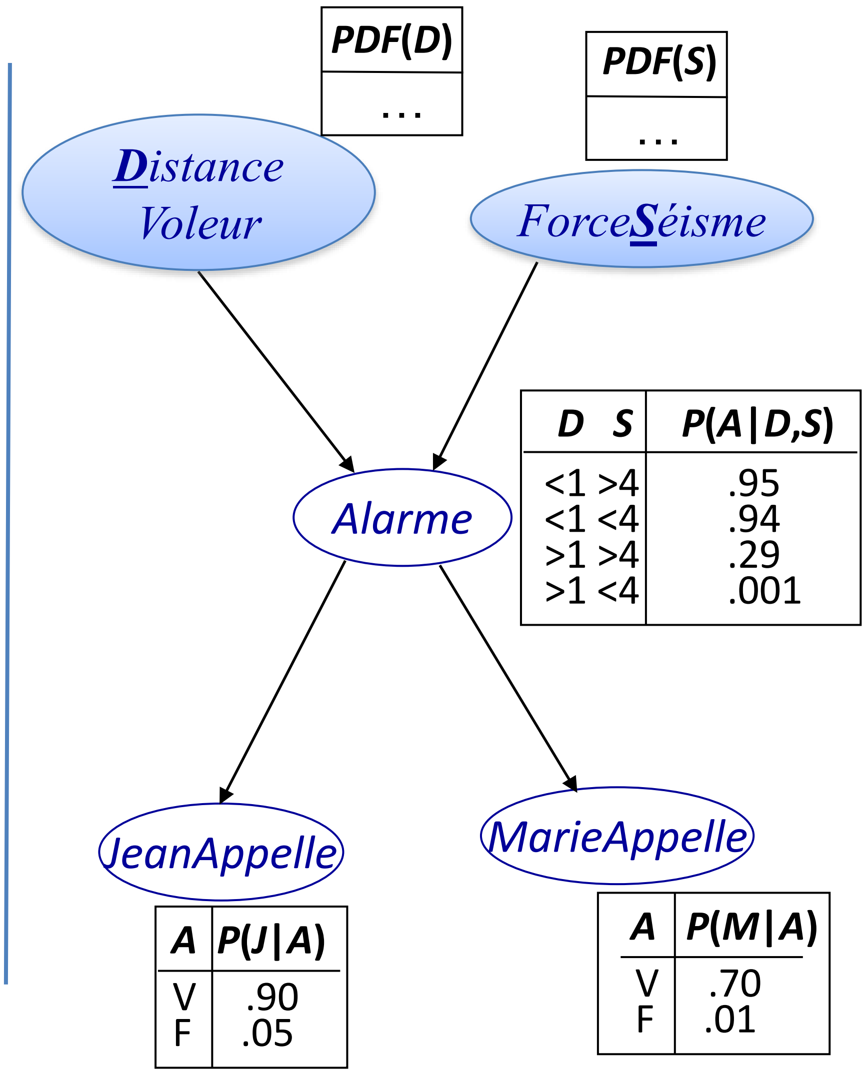
C	***S***	***P*(*A*|*C*,*S*)**
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	***P*(*J*|*A*)**
T	.90
F	.05

A	***P*(*M*|*A*)**
T	.70
F	.01

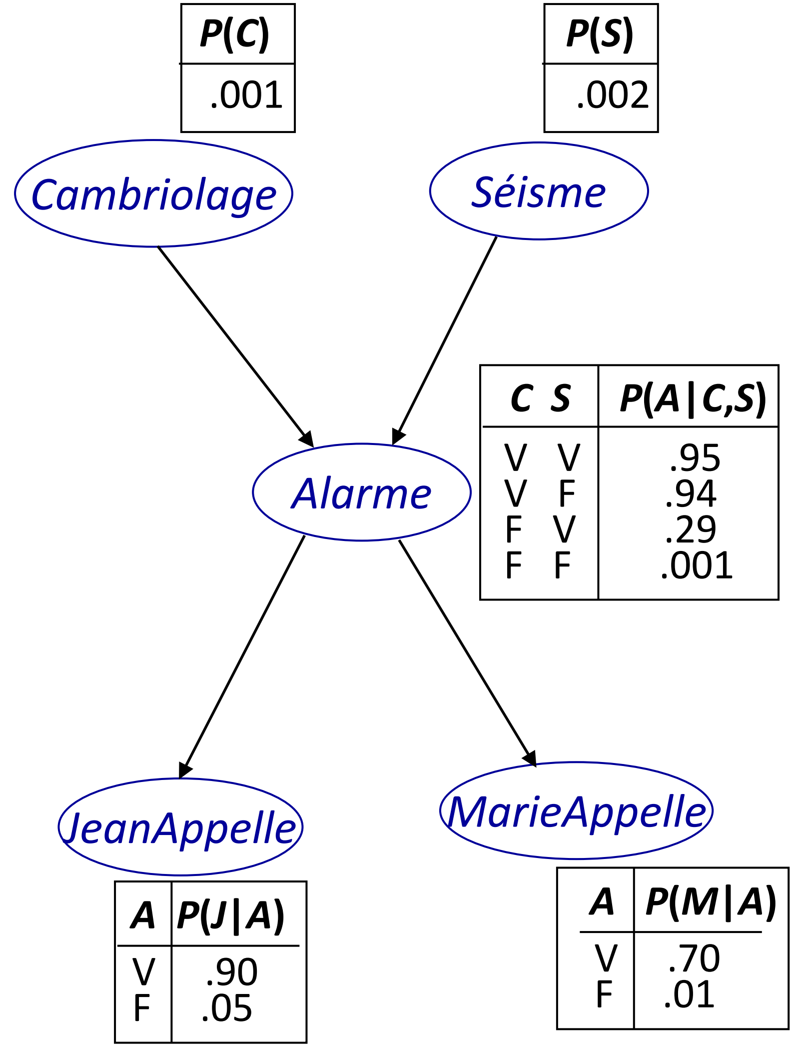
RB avec des variables continues

- Dans ce cours, on considère uniquement des RB avec des variables discrètes :
  - les TPC sont spécifiées en énumérant toutes les entrées
- Mais les RB peuvent aussi supporter les variables continues :
  - les probabilités conditionnelles sont spécifiées par des **fonctions de densité de probabilités** (PDF)
  - exemples :
    - » distance entre voleur et le capteur de mouvement
    - » force du séisme sur l'échelle de Richter



Autres appellations

- Il y a d'autres appellations pour les RB :
  - **réseaux de croyance** (***belief networks***)
  - **modèle graphique dirigé acyclique**
- Les RB font partie de la classe plus courante des **modèles graphiques**



Sémantique

- Un RB est une façon compacte de représenter des probabilités conjointes

- Par définition, la probabilité conjointe de X_1 et X_2 est donnée par la distribution $\mathbf{P}(X_1,X_2)$, pour une valeur donnée de X_1 et X_2

- La distribution conditionnelle de X_1 sachant X_2 est notée $\mathbf{P}(X_1 | X_2)$
  - $\mathbf{P}(X_1,X_2) = \mathbf{P}(X_1 \mid X_2)\, P(X_2)$

- Soit $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, l'ensemble des variables d'un RB :

$$\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i))$$

- En d'autres mots, la distribution conjointe des variables d'un RB est définie comme étant le produit des distributions conditionnelles (locales)

Calcul de probabilité conjointe

- Nous avons vu que, quelque soit l'ensemble de variables $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, par définition :

$$P(X_1, \ldots, X_n) = P(X_n \mid X_{n-1}, \ldots, X_1)\, P(X_{n-1}, \ldots, X_1)$$
$$= P(X_n \mid X_{n-1}, \ldots, X_1)\, P(X_{n-1} \mid X_{n-2}, \ldots, X_1) \ldots P(X_2 \mid X_1)\, P(X_1)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \mid X_{i-1}, \ldots, X_1)$$

- Pour un RB : $P(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \mid Parents(X_i))$
  - ceci est cohérent avec l'assertion précédente pour autant que $Parents(X_i)$ soit l'ensemble de $\{X_{i-1}, \ldots, X_1\}$
  - ainsi, un RB est en fait une façon de **représenter les indépendances conditionnelles**

Exemple : probabilité conjointe

$\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i))$

$P(j, m, a, \neg c, \neg s)$

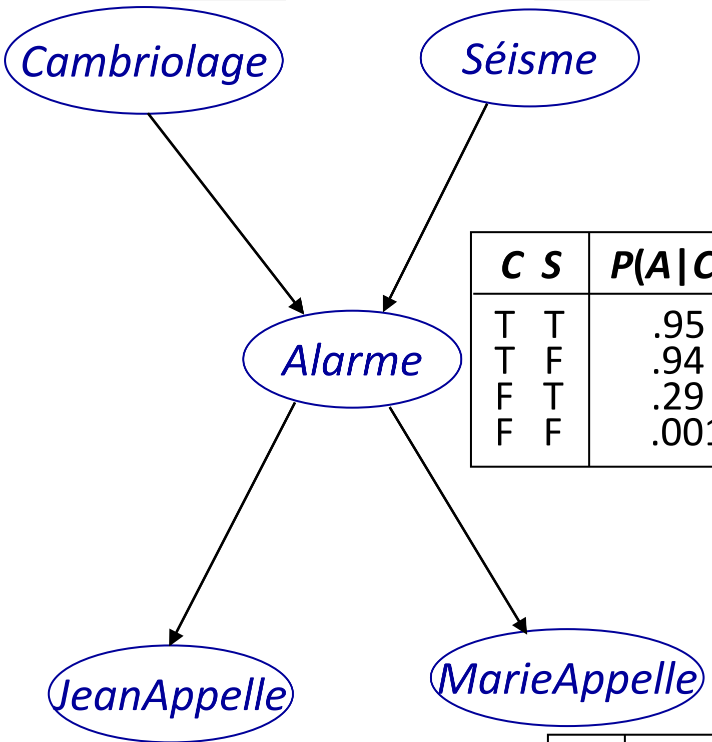
$= P(j|a)\, P(m|a)\, P(a|\neg c, \neg s)\, P(\neg c)\, P(\neg s)$

$= .90 * .70 * .001 * .999 * .998$

$\approx .00062$

$P(J{=}T, M{=}T, A{=}T, C{=}F, S{=}F)$
est aussi noté $P(j, m, a, \neg c, \neg s)$

$P(J{=}j, M{=}m, A{=}a, C{=}\neg c, S{=}\neg s)$
est aussi noté $P(j, m, a, \neg c, \neg s)$



P(C)
.001

P(S)
.002

C	S	P(A|C,S)
T	T	.95
T	F	.94
F	T	.29
F	F	.001

A	P(J|A)
T	.90
F	.05

A	P(M|A)
T	.70
F	.01

Exemple : probabilité marginale

$$P(\neg c, a) = \Sigma_m \Sigma_j \Sigma_s P(J{=}j, M{=}m, a, \neg c, S{=}s)$$

$$= \Sigma_m \Sigma_j \Sigma_s P(j|a)\, P(m|a)\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s)$$

$$= \Sigma_s \Sigma_j \Sigma_m P(j|a)\, P(m|a)\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s)$$

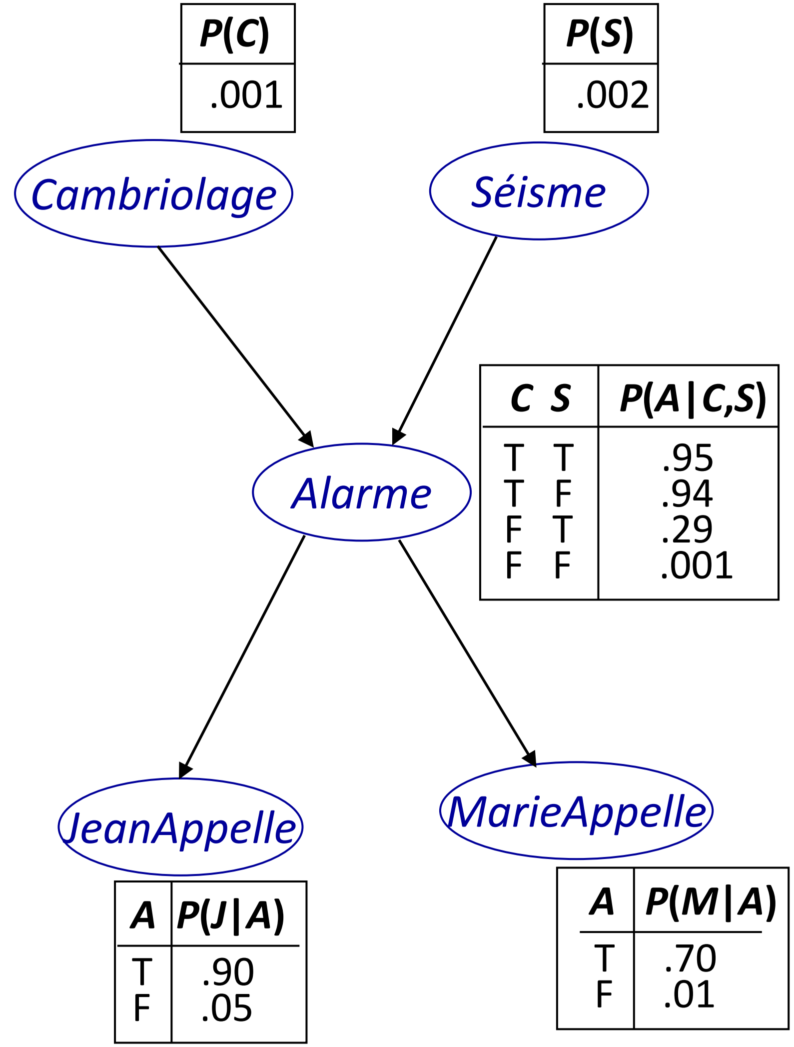
$$= \Sigma_s \Sigma_j P(j|a)\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s) \underbrace{\cancel{\Sigma_m P(m|a)}}_{=1}$$

$$= \Sigma_s P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s) \underbrace{\cancel{\Sigma_j P(j|a)}}_{=1}$$

$$= P(a|\neg c,s)\, P(\neg c)\, P(s) + P(a|\neg c,\neg s)\, P(\neg c)\, P(\neg s)$$

$$= .29 * .999 * .002 + .001 * .999 * .998$$

$$\approx 0.0016$$



Exemple : probabilité marginale

$P(\neg c, a) = \Sigma_m\, \Sigma_j\, \Sigma_s\, P(J{=}j, M{=}m, a, \neg c, S{=}s)$

$= \Sigma_m\, \Sigma_j\, \Sigma_s\, P(j|a)\, P(m|a)\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s)$

$= \Sigma_s\, \Sigma_j\, \Sigma_m\, P(j|a)\, P(m|a)\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s)$

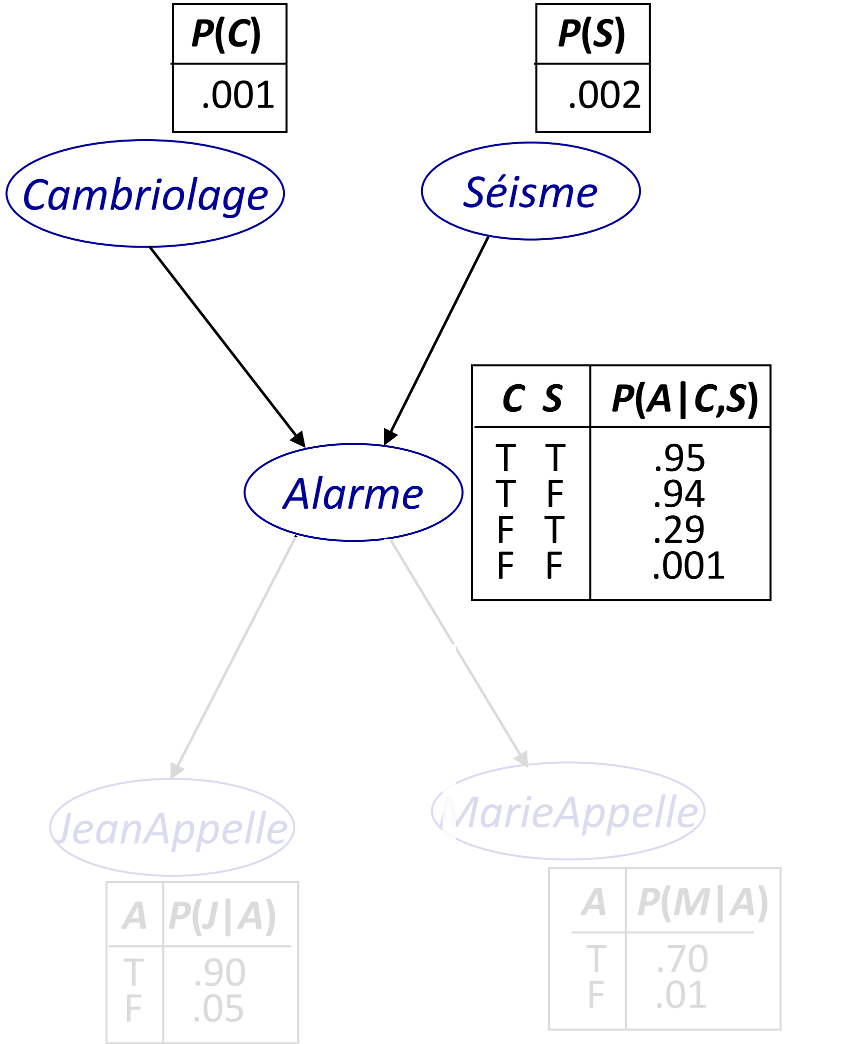
$= \Sigma_s\, \Sigma_j\, P(j|a)\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s)\, \underbrace{\cancel{\Sigma_m P(m|a)}}_{=1}$

$= \Sigma_s\, P(a|\neg c, s)\, P(\neg c)\, P(s)\, \underbrace{\cancel{\Sigma_j P(j|a)}}_{=1}$

$= P(a|\neg c,s)\, P(\neg c)\, P(s) + P(a|\neg c,\neg s)\, P(\neg c)\, P(\neg s)$

$= .29 * .999 * .002 + .001 * .999 * .998$

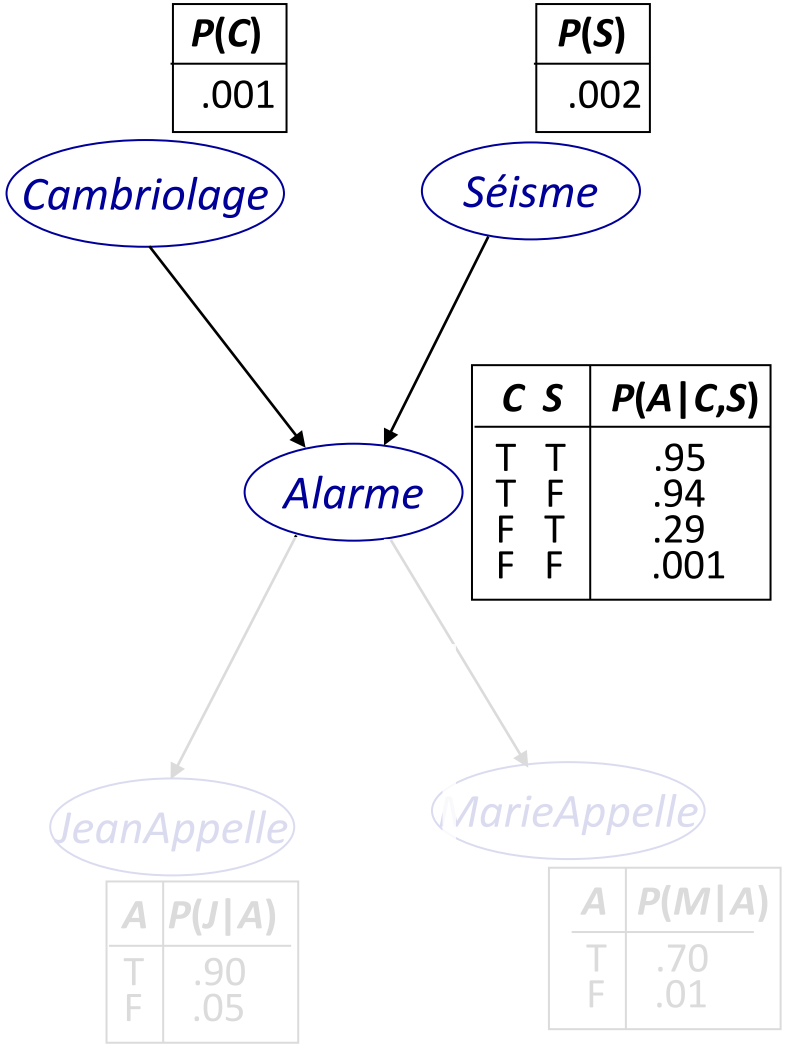
≈ 0.0016



Probabilité marginale

$P(\neg\, c, a) = \Sigma_m\, \Sigma_j\, \Sigma_s\, P(J{=}j, M{=}m, a, \neg c, S{=}s)$
$= \Sigma_s\, P(a \mid \neg\, c, S{=}s)\, P(\neg c)\, P(S{=}s)$

- Pour les probabilités marginales, on peut ignorer les nœuds **dont les descendants ne sont pas les nœuds observés**
  - *JeanAppelle* et *MarieAppelle* et leurs descendants ne sont pas observés, alors on peut les ignorer
  - *Séisme* est un ancêtre de *Alarme*, alors on doit le marginaliser explicitement



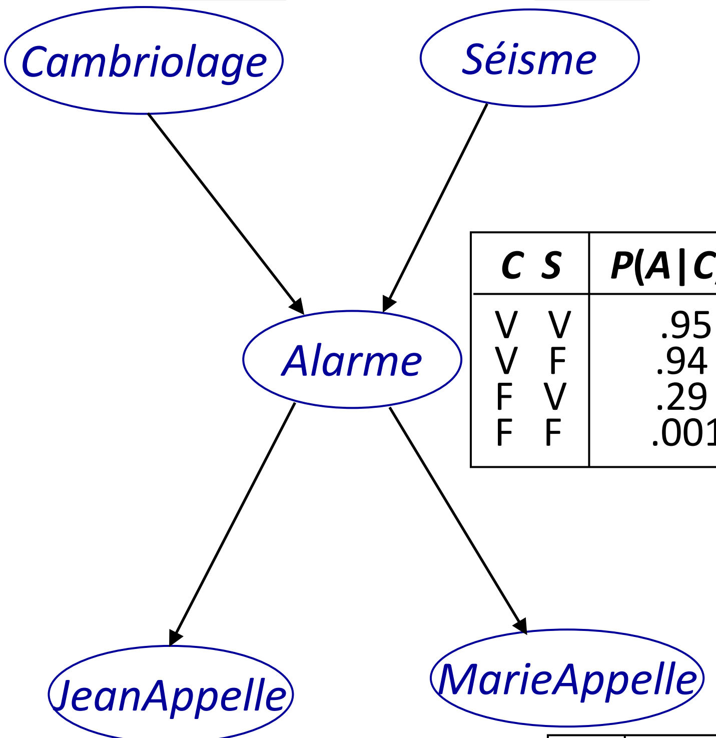
Indépendance conditionnelle dans un RB

1. Relation entre **grand-parent** et **enfant** étant donné les parents
   - sont indépendants si tous les parents sont observés.

- Exemples :
  - *Cambriolage* et *MarieAppelle* sont **dépendants** a priori
  - mais ils sont **indépendants** étant donné *Alarme* :

    $P(M|A,C) = P(M|A)$

  - si A est connu, C n'intervient pas dans le calcul
  - **connaître** A « bloque » le chemin entre M et C



$P(C)$
.001

$P(S)$
.002

C	S	$P(A\|C,S)$
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	$P(J\|A)$
V	.90
F	.05

A	$P(M\|A)$
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

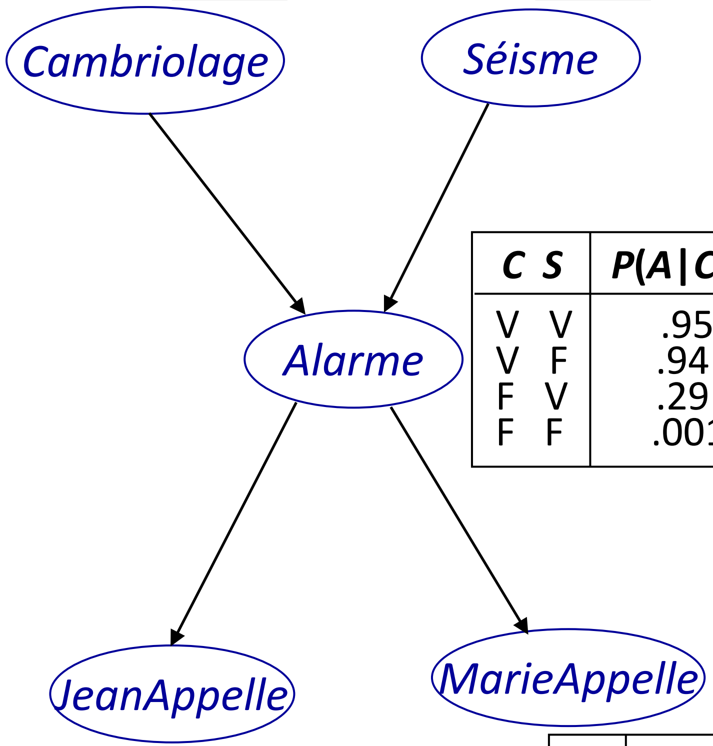
$$P(M|A,C) = P(M,A,C) \,/\, P(A,C)$$

$$= \frac{\Sigma_s\, P(M,A,C,S=s)}{\Sigma_s\, P(A,C,S=s)}$$

$$= \frac{\Sigma_s\, P(M|A)\ P(A|C,S=s)\ P(S=s)\ P(C)}{\Sigma_s\, P(A|C,S=s)\ P(S=s)\ P(C)}$$

$$= P(M|A)\ \frac{\cancel{\Sigma_s\, P(A|C,S=s)\ P(S=s)\ P(C)}}{\cancel{\Sigma_s\, P(A|C,S=s)\ P(S=s)\ P(C)}}$$

$$= P(M|A)$$



P(C)
.001

P(S)
.002

C	S	P(A|C,S)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	P(J|A)
V	.90
F	.05

A	P(M|A)
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

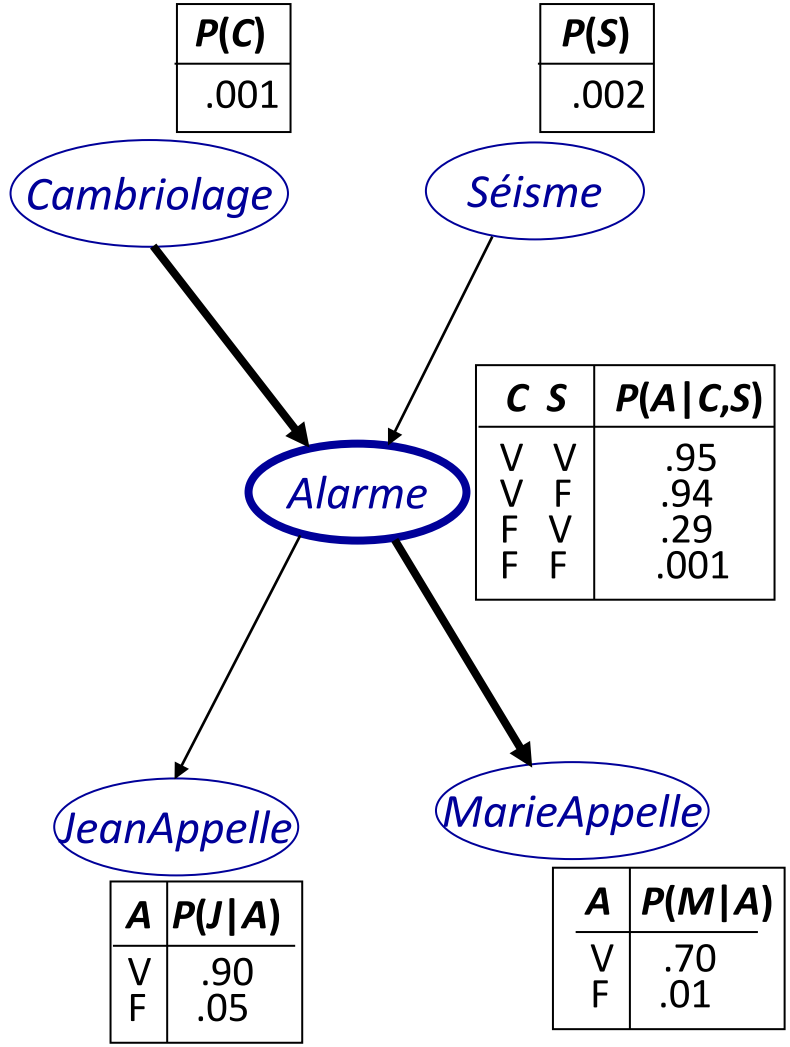
$$P(M|A,C) = P(M,A,C) \,/\, P(A,C)$$

$$= \frac{\Sigma_s P(M,A,C,S{=}s)}{\Sigma_s P(A,C,S{=}s)}$$

$$= \frac{\Sigma_s \mathbf{P(M|A)\ P(A|C,S{=}s)}\ P(S{=}s)\ P(C)}{\Sigma_s P(A|C,S{=}s)\ P(S{=}s)\ P(C)}$$

$$= P(M|A) \frac{\cancel{\Sigma_s P(A|C,S{=}s)\ P(S{=}s)\ P(C)}}{\cancel{\Sigma_s P(A|C,S{=}s)\ P(S{=}s)\ P(C)}}$$

$$= P(M|A)$$



P(C)
.001

P(S)
.002

C	S	P(A|C,S)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	P(J|A)
V	.90
F	.05

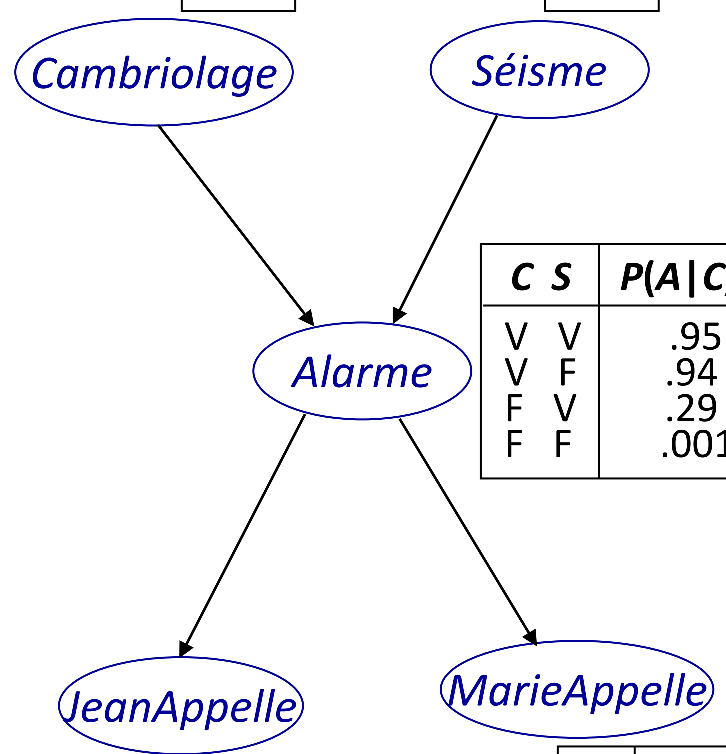
A	P(M|A)
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

2. Relation entre **deux enfants** étant donné un parent:
   - sont indépendants si tous leurs parents sont observés

- Exemples :
  - *JeanAppelle* et *MarieAppelle* sont **dépendants** à priori
  - mais ils sont **indépendants** étant donné *Alarme* :

    $P(M|A,J) = P(M|A)$
  - si A est connu, J n'intervient pas dans le calcul
  - **connaître** A « bloque » le chemin entre J et M



$P(C)$
.001

$P(S)$
.002

C	S	$P(A\|C,S)$
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	$P(J\|A)$
V	.90
F	.05

A	$P(M\|A)$
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

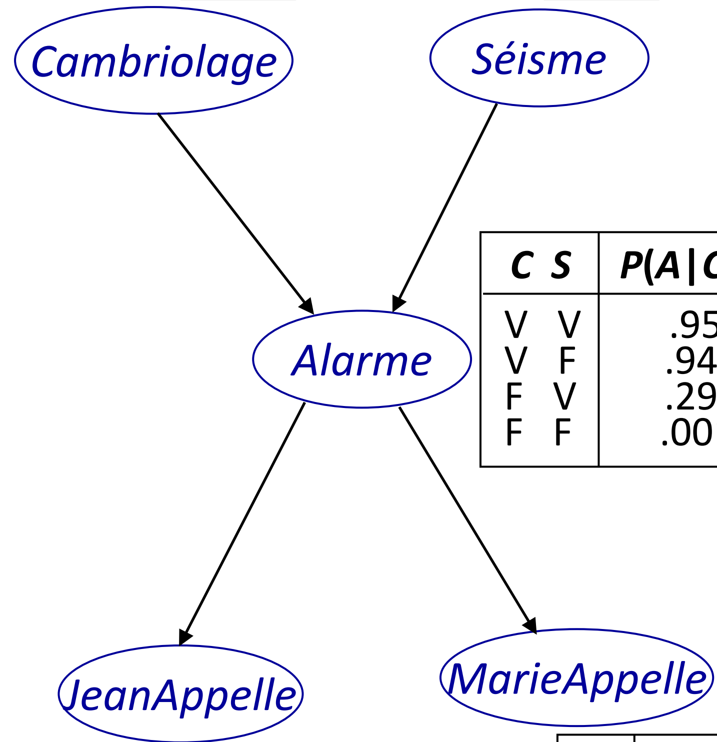
$$P(M|A,J) = P(M,A,J) \,/\, P(A,J)$$

$$= \frac{\Sigma_s \Sigma_c P(M,A,J,S{=}s,C{=}c)}{\Sigma_s \Sigma_c P(A,J,S{=}s,C{=}c)}$$

$$= \frac{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\; P(M|A)\; P(A,S{=}s,C{=}c)}{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\; P(A,S{=}s,C{=}c)}$$

$$= P(M|A) \frac{\cancel{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\; P(A,S{=}s,C{=}c)}}{\cancel{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\; P(A,S{=}s,C{=}c)}}$$

$$= P(M|A)$$



***P*(*C*)**
.001

***P*(*S*)**
.002

C	***S***	***P*(*A*|*C*,*S*)**
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	***P*(*J*|*A*)**
V	.90
F	.05

A	***P*(*M*|*A*)**
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

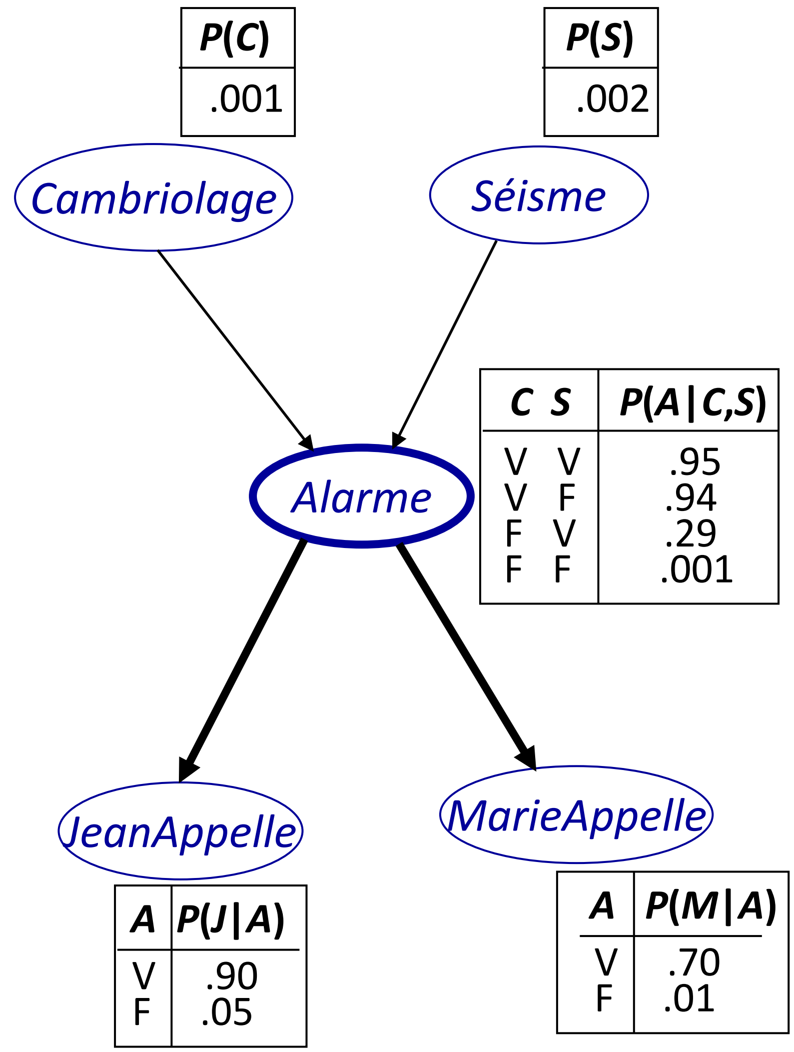
$$P(M|A,J) = P(M,A,J) \,/\, P(A,J)$$

$$= \frac{\Sigma_s \Sigma_c P(M,A,J,S{=}s,C{=}c)}{\Sigma_s \Sigma_c P(A,J,S{=}s,C{=}c)}$$

$$= \frac{\Sigma_s \Sigma_c \mathbf{P(J|A)\ P(M|A)}\ P(A,S{=}s,C{=}c)}{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\ P(A,S{=}s,C{=}c)}$$

$$= \frac{P(M|A)\ \cancel{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\ P(A,S{=}s,C{=}c)}}{\cancel{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\ P(A,S{=}s,C{=}c)}}$$

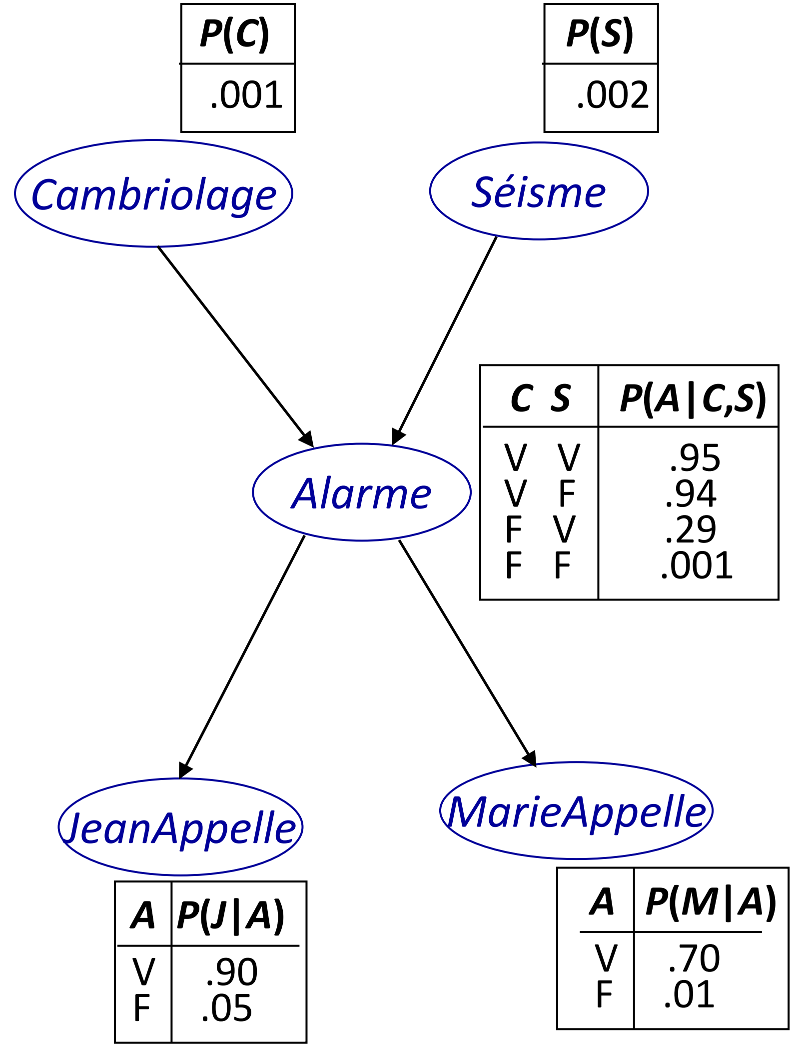
$$= P(M|A)$$



Indépendance conditionnelle dans un RB

3. Relation entre **deux parents** étant donné un enfant
   - sont indépendants si enfant **non** observé

- Exemples :
  - *Cambriolage* et *Séisme* sont **indépendants** à priori
  - mais ils sont **dépendants** étant donné *Alarme*
    - » $P(C|A,S)$ n'est pas simplifiable, parce que $P(A|C,S)$ n'est pas simplifiable
  - **ne pas connaître** A « bloque » le chemine entre C et S



P(*C*)
.001

P(*S*)
.002

C	*S*	*P*(*A*|*C*,*S*)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

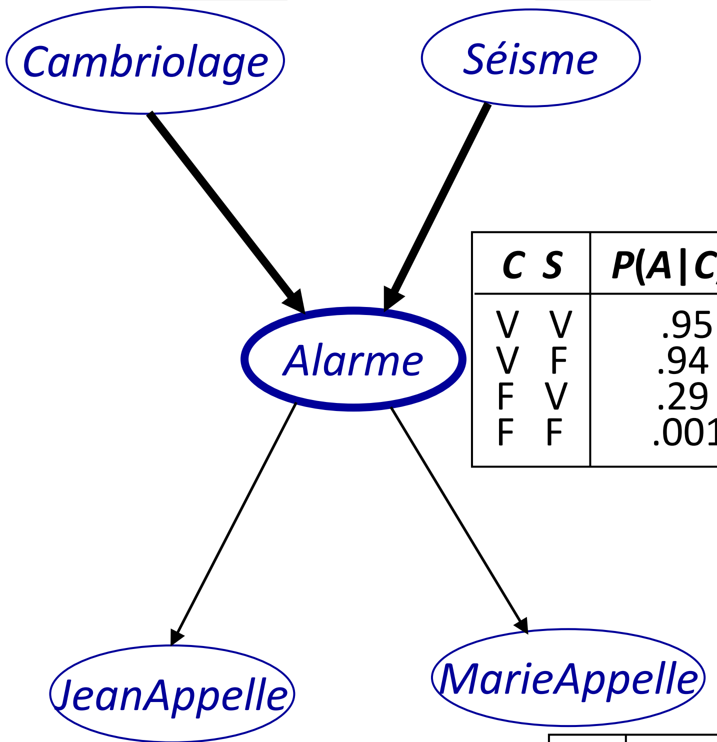
A	*P*(*J*|*A*)
V	.90
F	.05

A	*P*(*M*|*A*)
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

$$P(C|A,S) = P(C,A,S) \;/\; P(A,S)$$

$$= \frac{\mathbf{P(A|S,C)}\, P(S)\, P(C)}{\Sigma_c\, P(A|S)\, P(S)\, P(C)}$$



P(C)
.001

P(S)
.002

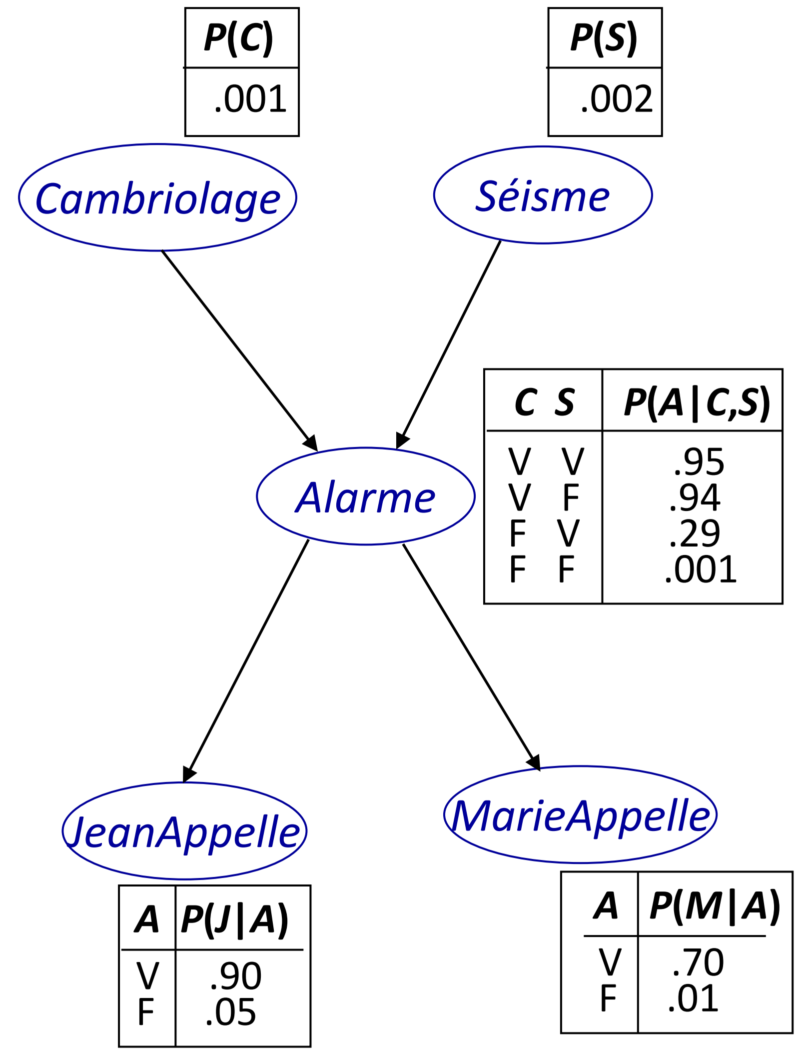
C	***S***	***P(A|C,S)***
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	***P(J|A)***
V	.90
F	.05

A	***P(M|A)***
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

- De ces trois dernières règle, émane une **règle plus générale**:
  - un nœud est indépendant de ses **non-descendants**, étant donné ses parents
  - exemples :
    - *Cambriolage* et *Séisme* sont **indépendants** a priori
    - mais ils sont **dépendants** étant donné *Alarme*
      - *P*(*C*|*A*,*S*) n'est pas simplifiable, parce que *P*(A|C,*S*) n'est pas simplifiable
    - **ne pas connaître** A « bloque » le chemine entre C et S



Indépendance conditionnelle dans un RB : D-séparation

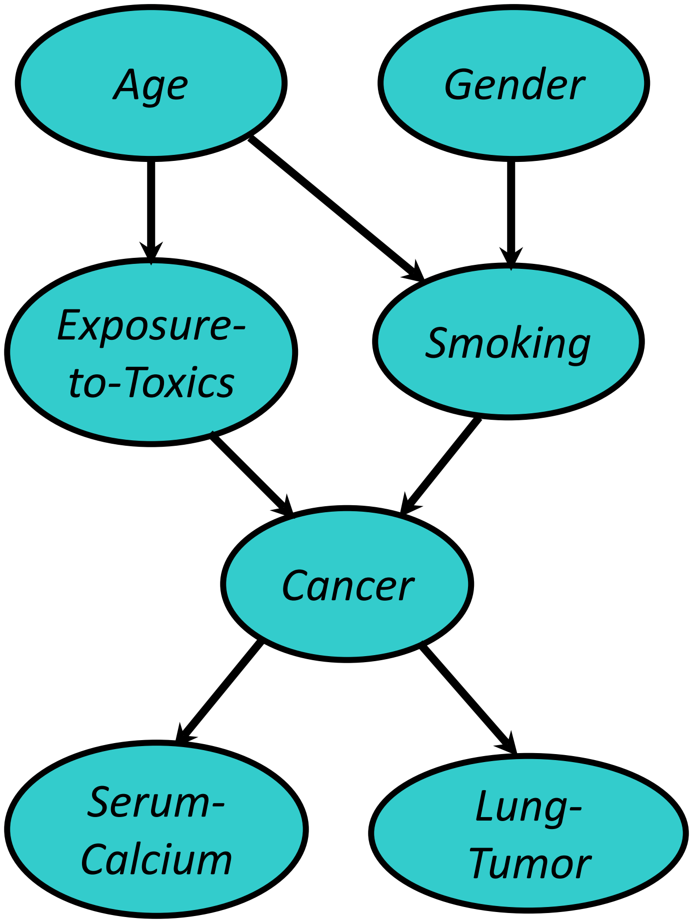
- **D-séparation** : critère général pour décider si un nœud *X* est indépendant d'un nœud *Y*, étant donnés d'autres nœuds $Z = \{Z_1, ..., Z_m\}$

- *X* est indépendant de *Y* sachant *Z* si tous **les chemins non-dirigés** entre *X* et *Y* sont **bloqués** par *Z*

- Un **chemin est bloqué** s'il contient au moins un noeud *N* qui satisfait une ou l'autre des conditions suivantes :
  1. il inclue un noeud $\rightarrow N \rightarrow$ ou $\leftarrow N \rightarrow$, où $N \in \{Z_1, ..., Z_m\}$
  2. il inclue un noeud $\rightarrow N \leftarrow$ et $N \notin \{Z_1, ..., Z_m\}$, et **aucun des descendants** de *N* *appartient* $\{Z_1, ..., Z_m\}$.

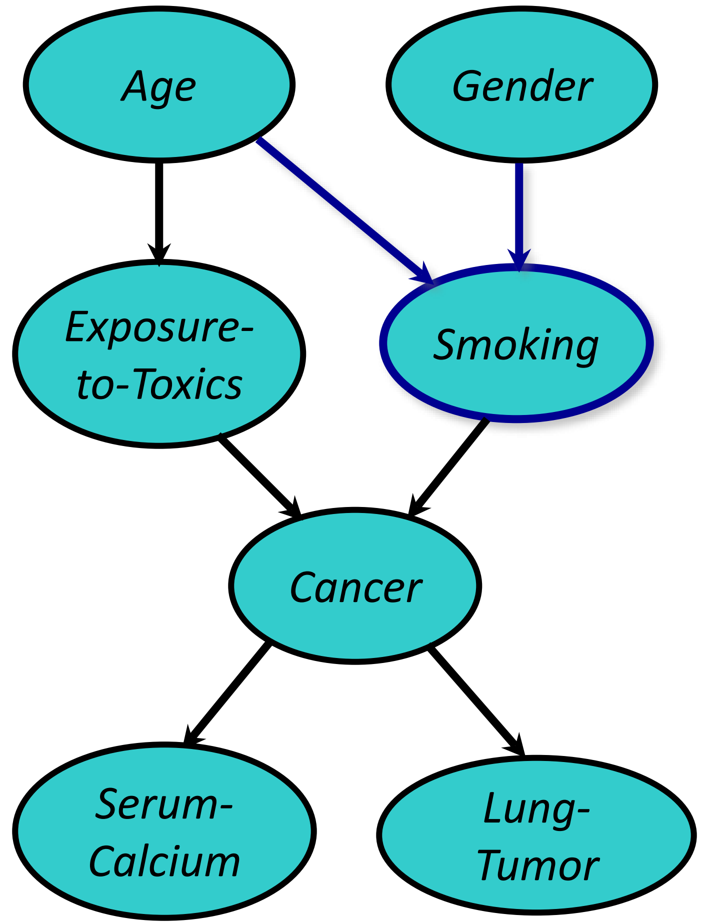
Exemple

- Est-ce que *Age* et *Gender* sont indépendants ?



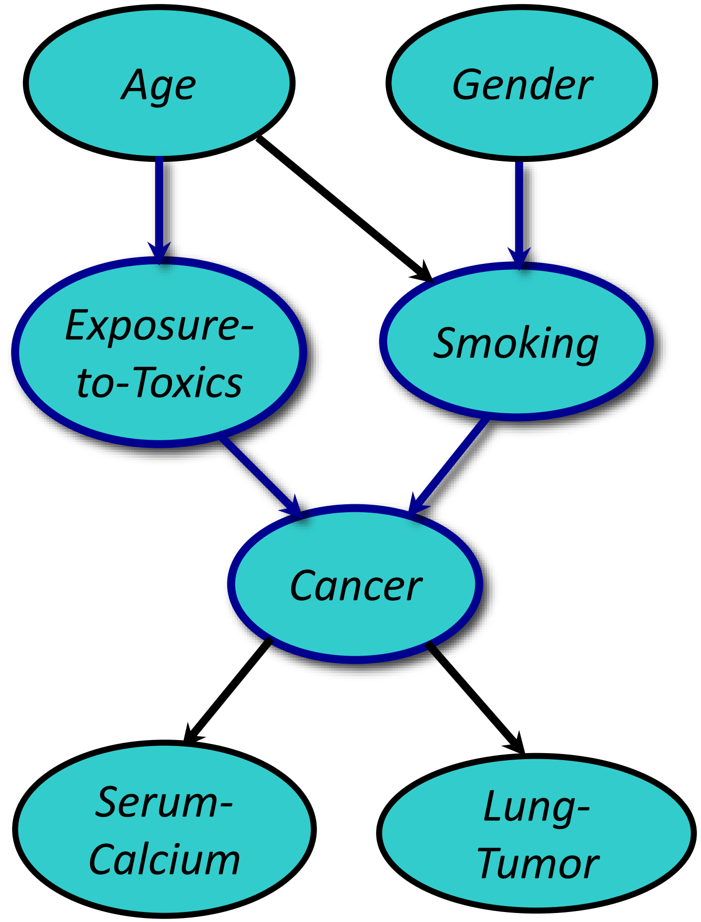
Exemple

- Est-ce que *Age* et *Gender* sont indépendants ?
  - chemin 1 est bloqué au niveau de *Smoking* $\rightarrow N \leftarrow$
    - » *Smoking* et ses descendants *Cancer*, *Serum-Calcium* et *Lung-Tumor* ne sont pas observés



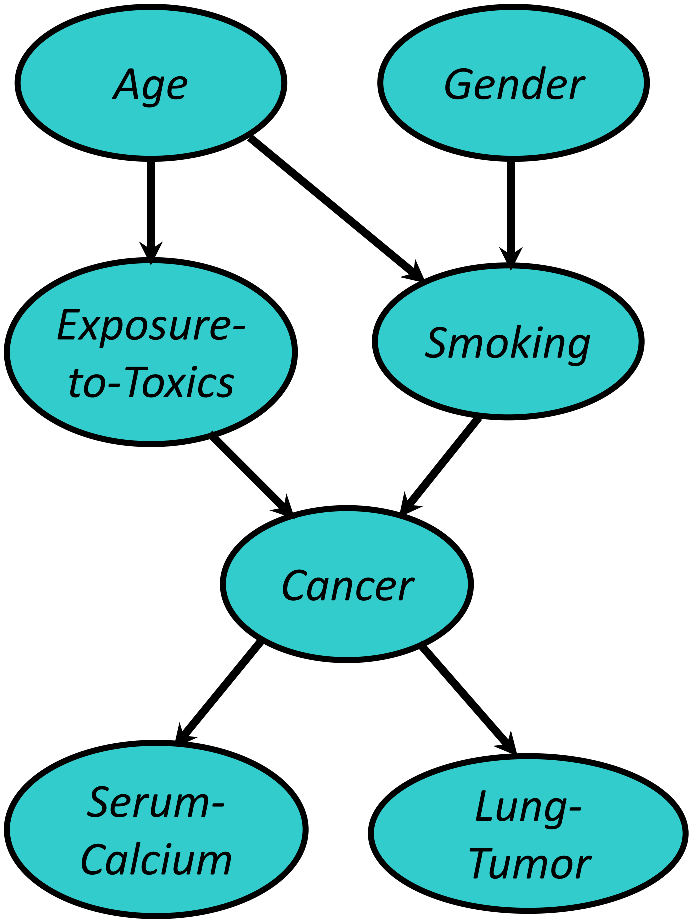
Exemple

- Est-ce que *Age* et *Gender* sont indépendants ?
  - chemin 1 est bloqué au niveau de *Smoking* $\rightarrow N \leftarrow$
    - » *Smoking* et ses descendants *Cancer*, *Serum-Calcium* et *Lung-Tumor* ne sont pas observés
  - chemin 2 est aussi Cancer
    - » même raisons $\rightarrow N \leftarrow$
- Réponse : **oui**



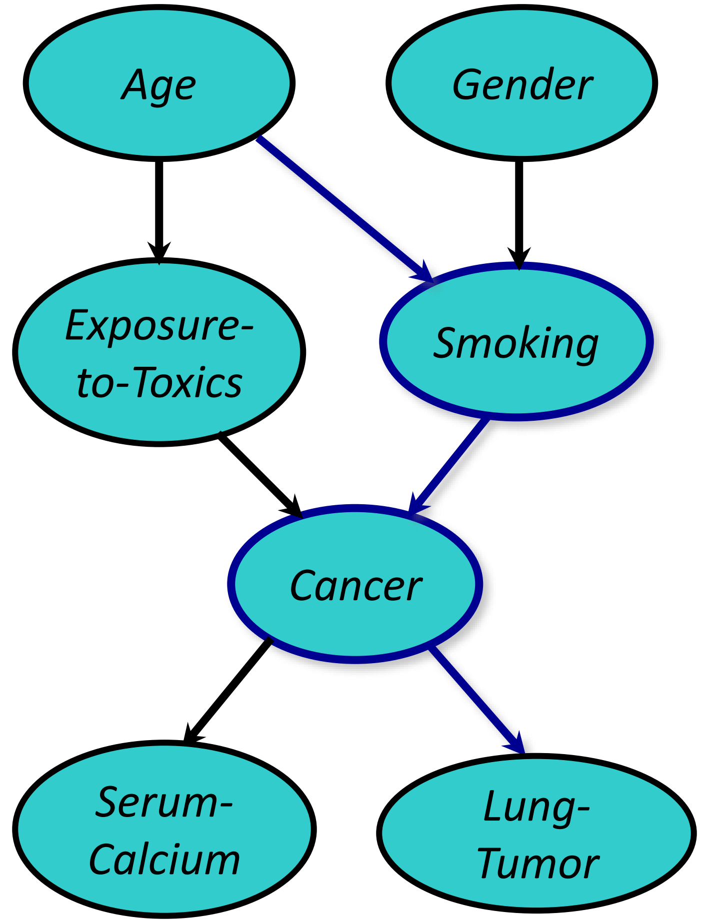
Exemple

- Est-ce que *Age* et *Lung-Tumor* sont indépendants sachant *Smoking* ?



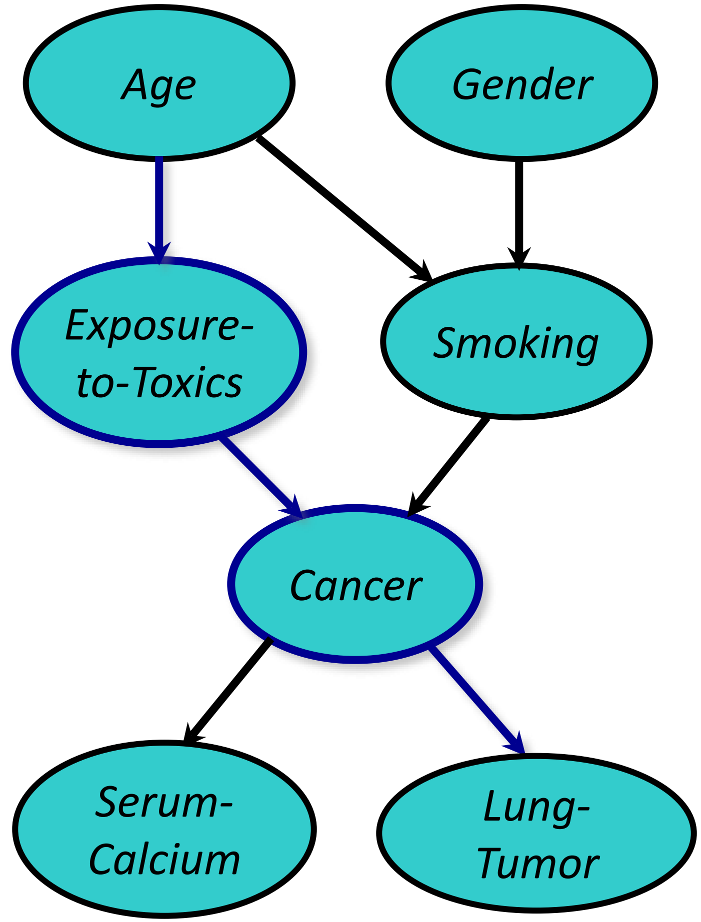
Exemple

- Est-ce que *Age* et *Lung-Tumor* sont indépendants sachant *Smoking* ?
  - chemin 1 est bloqué au niveau de *Smoking* $\rightarrow N \rightarrow$
    - » *Smoking* est observé



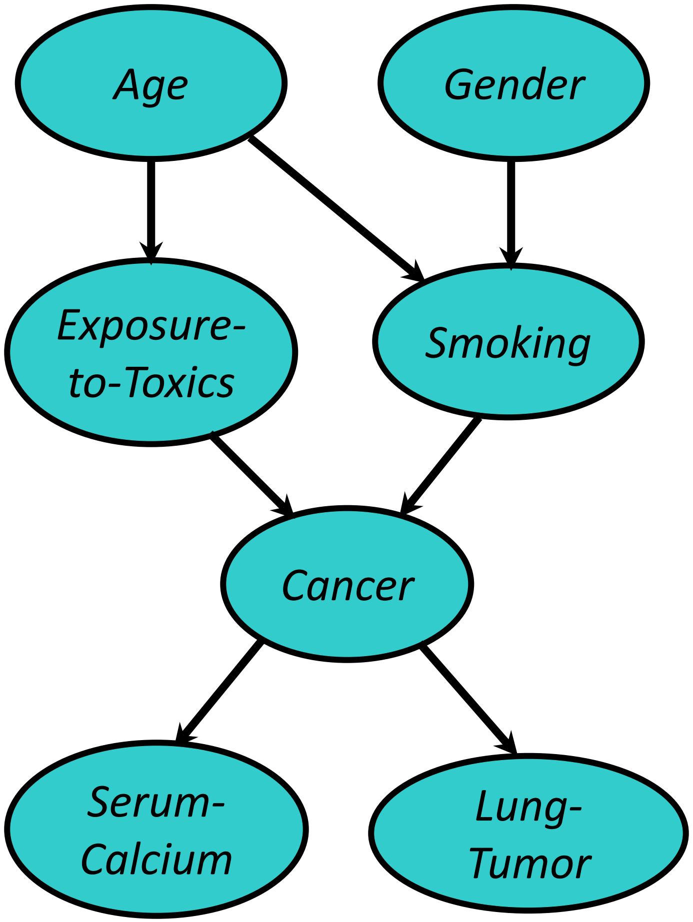
Exemple

- Est-ce que *Age* et *Lung-Tumor* sont indépendants sachant *Smoking* ?
  - chemin 1 est bloqué au niveau de *Smoking* $\rightarrow N \rightarrow$
    - » *Smoking* est observé
  - chemin 2 n'est pas bloqué
    - » *Exposure-to-Toxics* $\rightarrow N \rightarrow$ n'est pas observé
    - » *Cancer* $\rightarrow N \rightarrow$ n'est pas observé
- Réponse : **non**



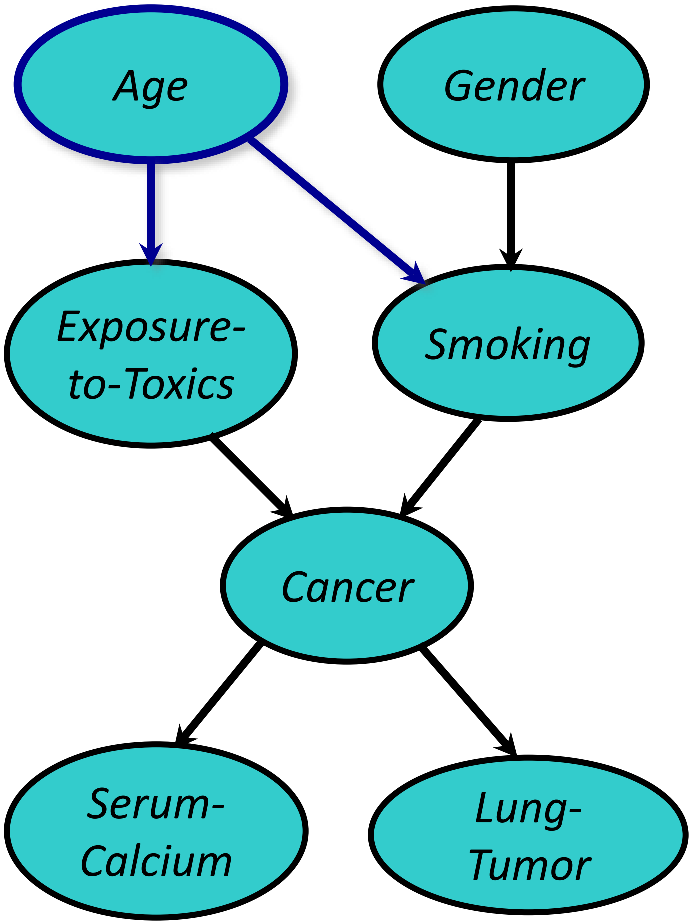
Exemple

- Est-ce que *Exposure-to-Toxics* et *Smoking* sont indépendants sachant *Age* et *Lung-Tumor*?



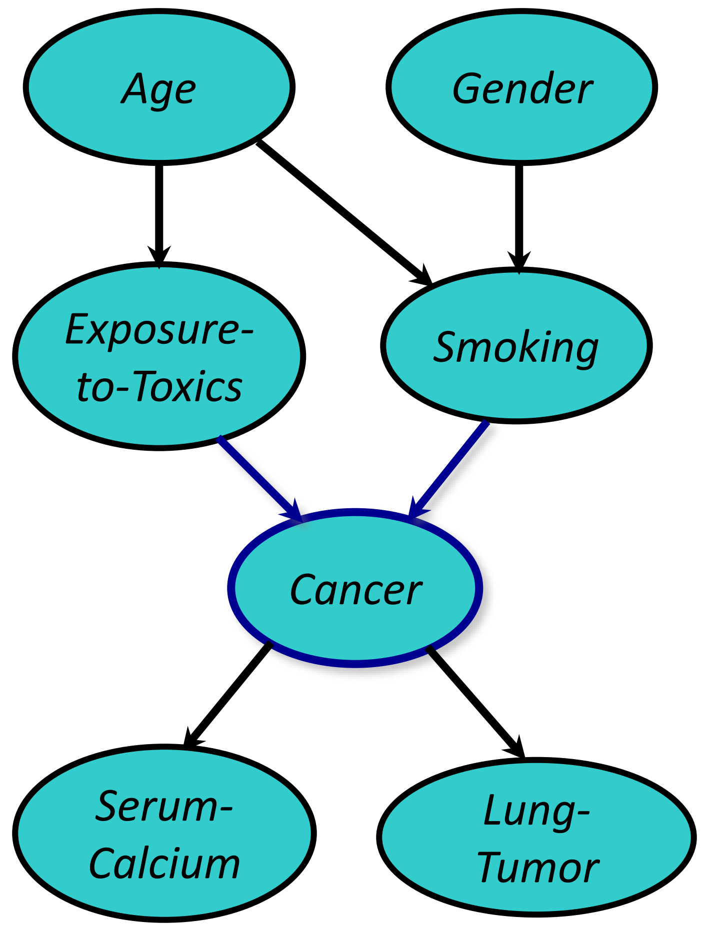
Exemple

- Est-ce que *Exposure-to-Toxics* et *Smoking* sont indépendants sachant *Age* et *Lung-Tumor*?
  - chemin 1 est bloqué au niveau de *Age* ← *N* →
    - *Age* est observé



Exemple

- Est-ce que *Exposure-to-Toxics* et *Smoking* sont indépendants sachant *Age* et *Lung-Tumor*?
  - chemin 1 est bloqué au niveau de *Age* ← N →
    - » *Age* est observé
  - chemin 2 n'est pas bloqué
    - » *Cancer* → N ←
      ne bloque pas le chemin puisque *Lung-Tumor*, un de ses descendants, est observé



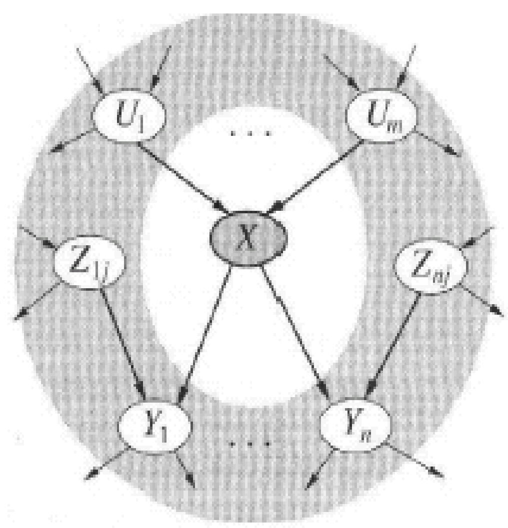
- Réponse : **non**

Indépendance conditionnelle dans un RB : Couverture de Markov

- Soit la **couverture de Markov** (***Markov blanket***) $MB(X)$ d'un nœud X, c'est à dire :
  - les parents de X
  - les enfants de X
  - et les parents des enfants de X
- Le nœud X est conditionnellement indépendant des autres nœuds (hors de la couverture de Markov), étant donné les nœuds de la couverture de Markov :

  $\mathbf{P}(X|MB(X),Others) = \mathbf{P}(X|MB(X))$
- **La couverture de Markov** est décrite dans le manuel du cours mais elle **est moins générale que la D-séparation.**

Couverture de Markov de X

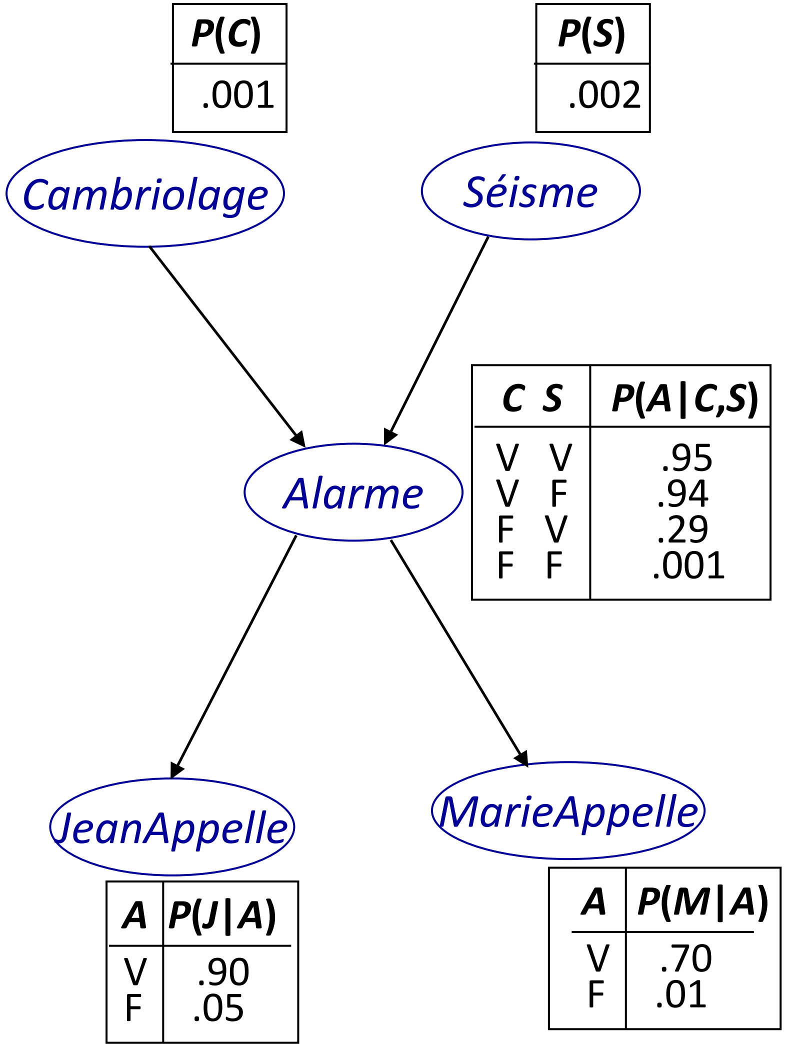


Requête dans un RB

- L'usage principal d'un RB est de calculer les probabilités à posteriori, étant donné un événement observé
  - un événement est une assignation de valeurs à certaines variables d'observation
  - ex. : sachant le résultat d'une batterie de test, quelle est maintenant la probabilité qu'un patient ait une maladie *X* ?
- On va noter
  - *X* **l'ensemble** de variables pour lesquelles on fait une requête
    - » ex. : la patient a la maladie *X*
  - *E* l'ensemble des variables d'observation et *e* les valeurs observées
    - » ex. : $E_i = e_i$ est le résultat d'un test
  - *Y* l'ensemble des variables cachées (qui ne sont pas observées)
    - » ex. : Y_i est le résultat de tests qui n'ont pas été faits
- Une **requête** est l'inférence de $\mathbf{P}(X|e)$, où *e* est une assignation de valeurs aux variables dans E

Types d'interrogations d'un RB

- **Diagnostique** (on connaît les effets, on cherche les causes)
  - **P**(*Cambriolage*|*JeanAppelle*=*vrai*)
  - garder à l'esprit qu'on a des arcs « causes / effets ».
- **Prédiction** (étant données les causes, quels sont les effets)
  - **P**(*JeanAppelle*|*Cambriolage*=*vrai*)
- **Probabilité conjointe ou marginale**
  - **P**(*Alarme*)



Requête dans un RB

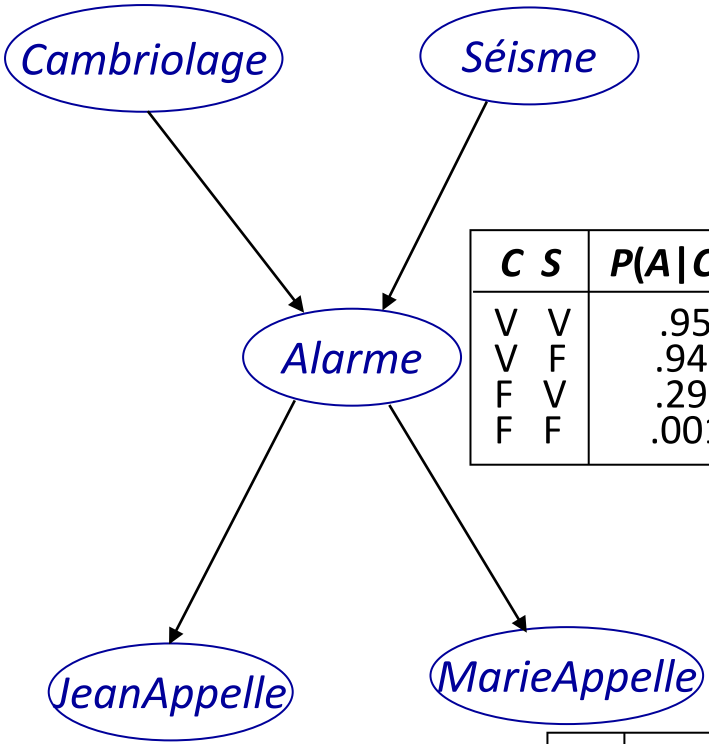
- Exemple :

  P(*Cambriolage* | *JeanAppelle = vrai*,

  MarieAppelle = vrai)

  = [0.284, 0.716]

- Comment fait-on un tel calcul?
  - **inférence exacte** (prohibitif)
    - » **par énumération**
  - **inférence approximative par échantillonnage** avec les méthodes Monte-Carlo (plus efficace)
    - » **méthode de rejet**



***P*(*C*)**
.001

***P*(*S*)**
.002

C	***S***	***P*(*A*|*C*,*S*)**
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	***P*(*J*|*A*)**
V	.90
F	.05

A	***P*(*M*|*A*)**
V	.70
F	.01

Inférence par énumération

- On veut calculer la distribution sur les variables de requêtes **sachant** les observations

$$\mathbf{P}(X|e) = \alpha\, \mathbf{P}(X,E{=}e) = \alpha\, \Sigma_y\, \mathbf{P}(X, e, y)$$

- Les termes $P(X, e, y)$ peuvent s'écrire comme le produit des probabilités conditionnelles du réseau
- On peut donc calculer la réponse à une requête $P(X|e)$ dans un RB, simplement en
  1. calculant les sommes des produits des probabilités conditionnelles du RB
  2. normalisant ces sommes de façon à obtenir une distribution qui somme à 1
- Les ensembles des variables X, E et Y couvrent ensemble tous les noeuds
  - complexité en temps : $O(d^{|X|+|Y|})$, avec d la taille du plus grand domaine
  - complexité en espace : $O(d^{|X|})$, pour stocker la distribution

Exemple 1

- **P**(*Cambriolage* | *JeanAppelle = vrai*, *MarieAppelle = vrai*)
  - noté **P**(*C* | *j*, *m*)

- Les variables cachées sont *Séisme* et *Alarme*

  $\mathbf{P}(C \mid j, m) = \alpha\, \mathbf{P}(C, j, m)$

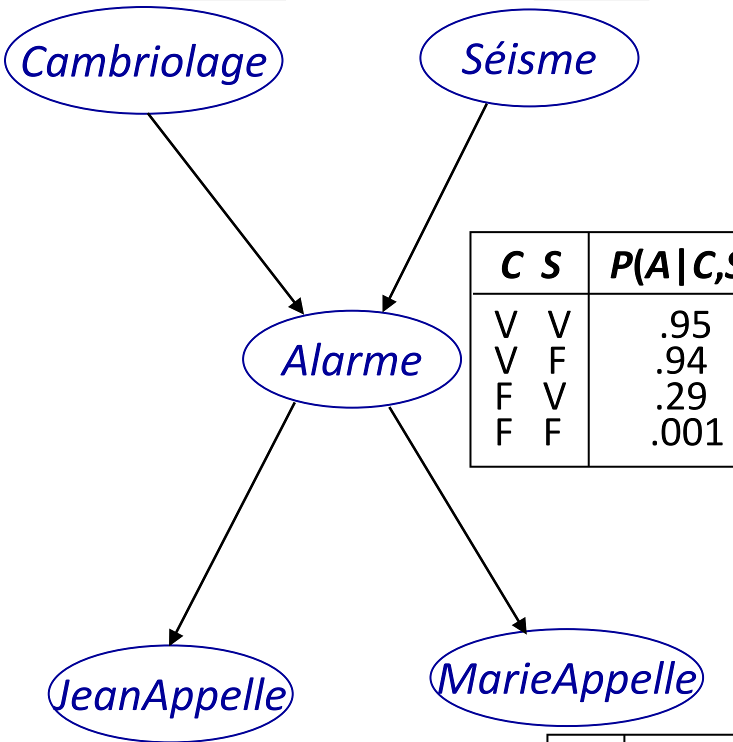
  $= \alpha\, \Sigma_s\, \Sigma_a\, \mathbf{P}(C, s, a, j, m)$

$= P(C)\, \Sigma_s \Sigma_a P(s)\, P(a|C,s)\, P(j|a)\, P(m|a)$

$= P(C)\, \Sigma_s P(s)\, \Sigma_a P(a|C,s)\, P(j|a)\, P(m|a)$

Note :

- *s* et *a* prennent toutes les valeurs possibles pour *S*=*s* et *A*=*a*
- ne pas confondre avec *j* et *m* qui sont des observations fixes (*J*=*vrai* et *M*=*vrai*)



P(*C*)
.001

P(*S*)
.002

C	*S*	*P*(*A*|*C*,*S*)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	*P*(*J*|*A*)
V	.90
F	.05

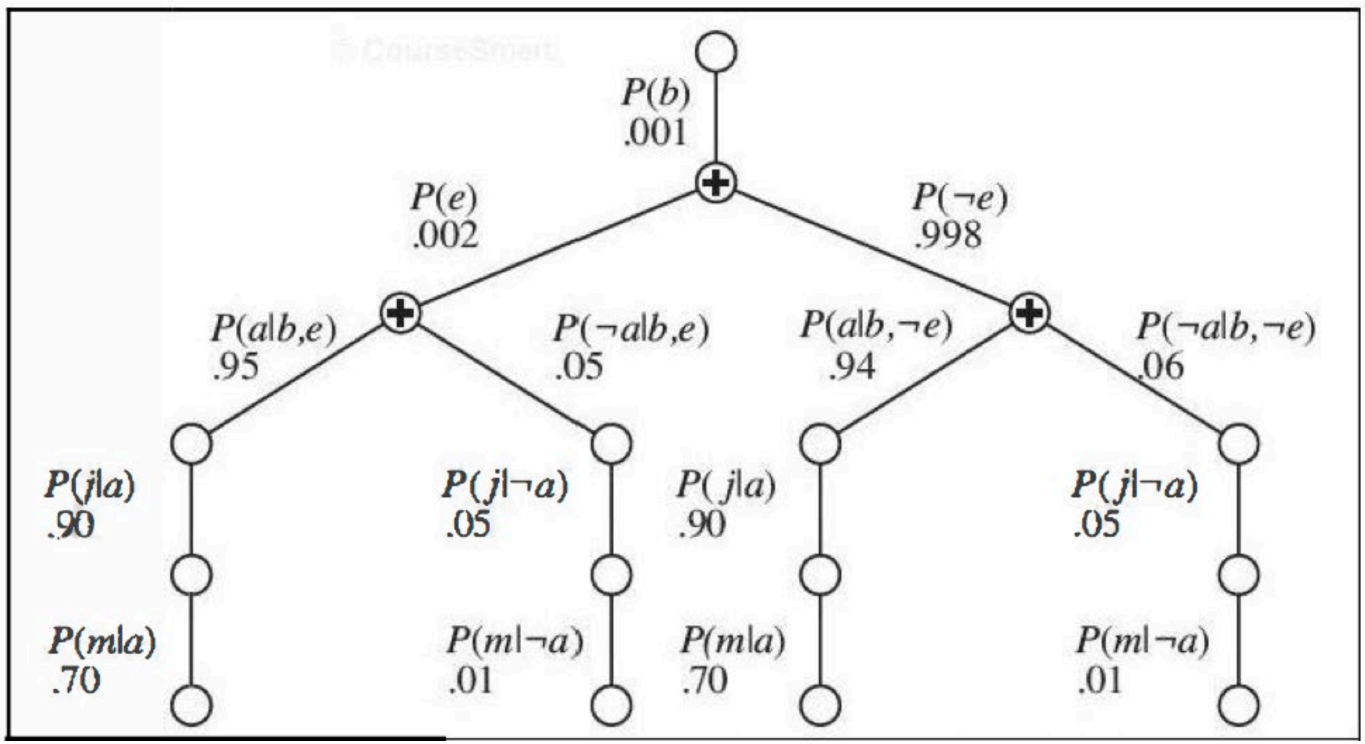
A	*P*(*M*|*A*)
V	.70
F	.01

Exemple 1 (suite)

- Structure de l'expression representée par l'équation

  $P(c \mid j, m) = \alpha * P(c) \; \Sigma_s P(s) \; \Sigma_a P(a|c,s) \; P(j|a) \; P(m|a)$

  $P(b \mid j, m) = \alpha * P(b) \; \Sigma_s P(e) \; \Sigma_a P(a|b,e) \; P(j|a) \; P(m|a)$ - En anglais



Exemple 1 (suite)

- On calcule pour $C = vrai$

  $P(c \mid j, m)$

  $= \alpha\, P(c)\, \Sigma_s P(s)\, \Sigma_a P(a|c,s)\, P(j|a)\, P(m|a)$

  $= \alpha * 0.001*(0.002*(0.95*0.90*0.70+$
  $0.05*0.05*0.01)+$
  $0.998*(0.94*0.90*0.70+$
  $0.06*0.05*0.01))$

  $= \alpha * 0.00059224$

- Et $C = faux$

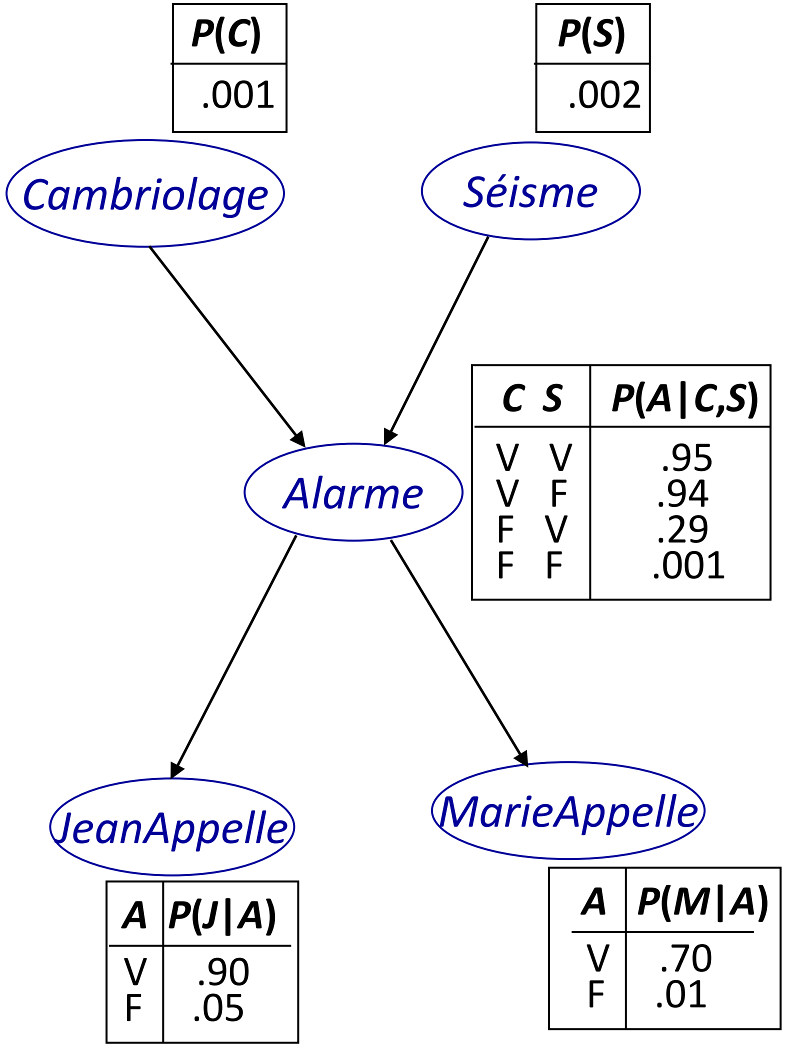
  $P(\neg c \mid j, m)$

  $= \alpha\, P(\neg c)\, \Sigma_s P(s)\, \Sigma_a P(a| \neg c,s)\, P(j|a)\, P(m|a)$

  $= \alpha * 0.0014919$

  $\alpha = 1 / (0.00059224 + 0.0014919)$

- Donc, $\mathbf{P}(C \mid j, m) = [0.284, 0.716]$



***P*(*C*)**
.001

***P*(*S*)**
.002

C	***S***	***P*(*A*|*C*,*S*)**
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	***P*(*J*|*A*)**
V	.90
F	.05

A	***P*(*M*|*A*)**
V	.70
F	.01

Exemple 2 : Évaluation par énumération

<u>Requête</u> :

Calculer $P(T=vrai \mid F=faux, M=vrai)$

<u>Variables connues :</u>

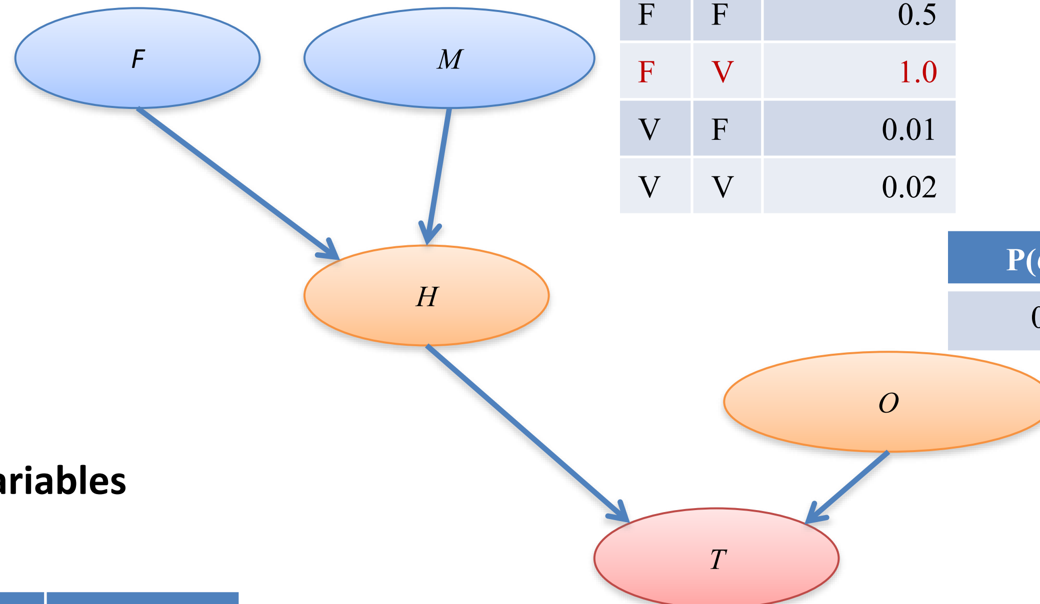
$F = faux$

$M = vrai$

<u>Variables inconnues :</u>

H

O



F	*M*	P(*H*|*F*,*M*)
F	F	0.5
F	V	1.0
V	F	0.01
V	V	0.02

P(*O*)
0.6

H	*O*	P(*T*|*H*,*O*)
F	F	0.1
F	V	0.5
V	F	0.5
V	V	1.0

Énumération des valeurs possibles des variables cachées (2*2)

H	*O*	P(*H*|*F*,*M*) * P(*O*)*P(*T*|*H*,*O*)	=
F	F	0.0 * 0.4 * 0.1	0
F	V	0.0 * 0.6 * 0.5	0
V	F	1.0 * 0.4 * 0.5	0.20
V	V	1.0 * 0.6 * 1.0	0.60
		TOTAL	**0.80**

Exemple 3 : Évaluation par énumération

<u>Requête</u> :

Calculer $P(T{=}vrai \mid M{=}vrai)$

<u>Variables connues :</u>

M = *vrai*

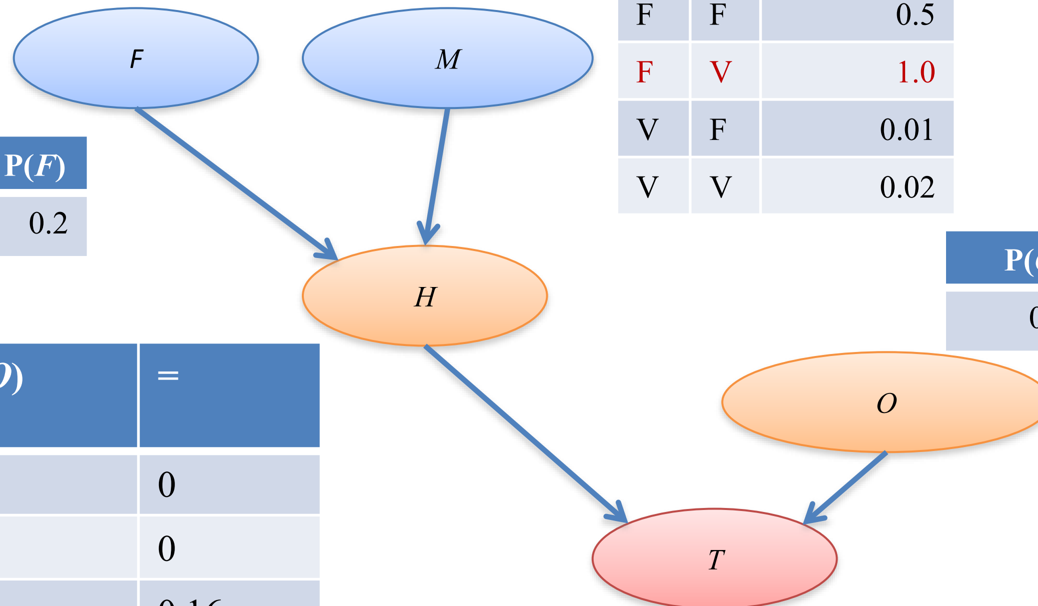
<u>Variables inconnues :</u>

H

O

F

P(*F*)
0.2



F	*M*	P(*H*|*F*,*M*)
F	F	0.5
F	V	1.0
V	F	0.01
V	V	0.02

P(*O*)
0.6

H	*O*	P(*T*|*H*,*O*)
F	F	0.1
F	V	0.5
V	F	0.5
V	V	1.0

F	*H*	*O*	P(*F*)*P(*H*|*F*,*M*)*P(*O*)* P(*T* | *H*, *O*)	=
F	F	F	0.8 * 0.0 * 0.4 * 0.1	0
F	F	V	0.8 * 0.0 * 0.6 * 0.5	0
F	V	F	0.8 * 1.0 * 0.4 * 0.5	0.16
F	V	V	0.8 * 1.0 * 0.6 * 1.0	0.48
V	F	F	0.2 * 0.98 * 0.4 * 0.1	0.00784
V	F	V	0.2 * 0.98 * 0.6 * 0.5	0.0588
V	V	F	0.2 * 0.02 * 0.4 * 0.5	0.0008
V	V	V	0.2 * 0.02 * 0.6 * 1.0	0.0024
			TOTAL	**0.71**

Exercice

- Soit le RB ayant les tables de probabilités conditionnelles suivantes
  - Dessinez le graphe du RB.
  - Calculez *P*(*A*=faux | *E*=vrai).
  - Dites si *B* et *E* sont indépendants sachant *F*. Pourquoi?
  - Dites si *E* et *F* sont indépendants sachant *A* et *C*. Pourquoi?

A	*C*	*F=vrai*
faux	*faux*	0.1
faux	*vrai*	0.2
vrai	*faux*	0.8
vrai	*vrai*	0.7

E	*C=vrai*
faux	0.2
vrai	0.4

D=vrai
0.2

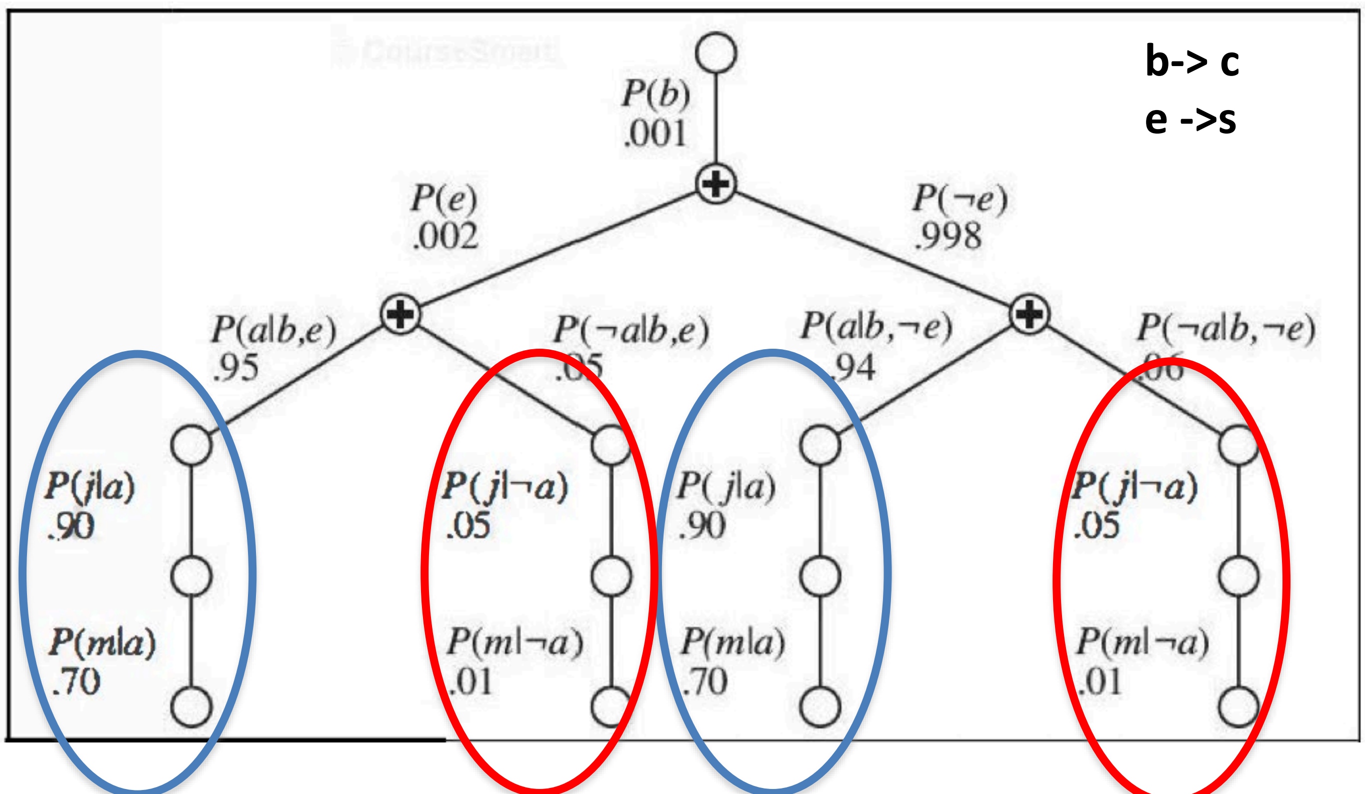
B	*D*	*E*	*A=vrai*
faux	*faux*	*faux*	0.7
faux	*faux*	*vrai*	0.2
faux	*vrai*	*faux*	0.5
faux	*vrai*	*vrai*	0.1
vrai	*faux*	*faux*	0.2
vrai	*faux*	*vrai*	0.9
vrai	*vrai*	*faux*	0.8
vrai	*vrai*	*vrai*	0.6

E=vrai
0.9

B=vrai
0.7

Inférence par élimination des variables

- Même principe que l'inférence par énumération, mais on évite les répétions de calculs déjà faits (comme en programmation dynamique)
- Voir section 14.4.2 du livre: $P(b \mid j, m) = \alpha * P(b)\, \Sigma_s P(e)\, \Sigma_a P(a|b,e)\, P(j|a)\, P(m|a)$



Inférence approximative

- Les méthodes d'inférence exactes sont inefficaces
  - le problème d'inférence dans un RB est NP-Complet
- Les méthodes d'inférence approximatives sont plus pratiques
  - en général, on n'a pas besoin d'un calcul exact des probabilités pour qu'une conclusion tirée d'un RB soit correcte
  - les méthodes approximatives assignent des valeurs aux variables aléatoires en fonction des TPC associées à ces variables
  - ces assignations sont basées sur des simulations stochastiques, plutôt que des observations réelles

Méthode de rejet (*rejection sampling*)

- Pour estimer $P(X=x|e)$
  - Générer des échantillons complets à partir de la distribution spécifiée par le RB
  - Rejeter tous les échantillons qui ne correspondent pas à l'observation ***e***.
  - Estimer $P(X=x|e)$ en comptant combien de fois X=x se produit dans les échantillons restant.
- Autremet dit:

  $P(X=x|e) = \alpha\ \Sigma_y\ P(X=x, e, y)\ \approx \mathrm{freq}(x,e)\ /\ \Sigma_{x'}\ \mathrm{freq}(x',e) = \mathrm{freq}(x,e)\ /\ \mathrm{freq}(e)$

- Cette technique est appelée **méthode de rejet** (***rejection sampling***)
  - le problème avec cette méthode est que si E=*e* est très rare selon le RB, il y aura peu d'échantillons qui correspondront à cette observation
  - d'autres méthodes sont plus efficaces et nécessitent moins d'échantillons pour obtenir une bonne estimation
  - voir la section 14.5 dans le livre

Exemple

Requête :

Calculer $P(T=vrai|M=vrai)$

Variables connues :

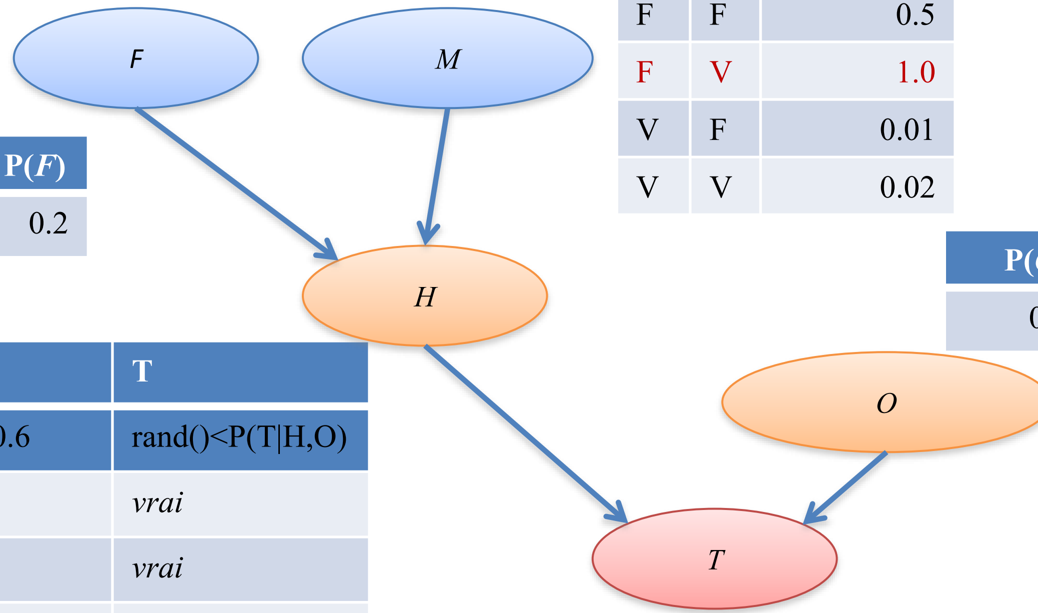
M = *vrai*

Variables inconnues :

H

O

F



P(*F*)
0.2

F	*M*	P(*H*|*F*,*M*)
F	F	0.5
F	V	1.0
V	F	0.01
V	V	0.02

P(*O*)
0.6

H	*O*	P(*T*|*H*,*O*)
F	F	0.1
F	V	0.5
V	F	0.5
V	V	1.0

	F	H	O	T
#	rand()<0.2	rand()<P(H|F,M)	rand()<0.6	rand()<P(T|H,O)
1	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
2	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
3	*faux*	*vrai*	*faux*	*faux*
4	*vrai*	*faux*	*faux*	*faux*
5	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
6	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
7	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
8	*faux*	*vrai*	*faux*	*vrai*
			Average of *T=vrai*	6/8 = **0.75**

Plus qu'il y a d'échantillons, plus l'erreur d'estimation est faible.

(Vraie réponse : 0.71)

Construction d'un RB

- Comment bâtir un RB afin de modéliser un environnement/problème donné?

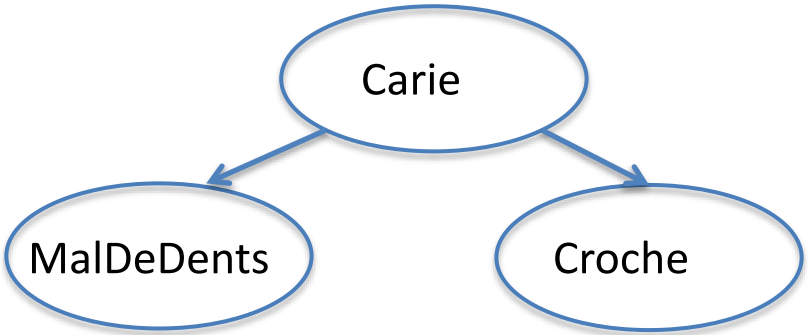
- On a besoin de spécifier 2 choses:
  1. La structure (graphe) du réseau (quelles indépendances peut-on supporter)
  2. Les table de probabilités (quelles relations entre les variables de l'environnement?)

Spécifier les tables de probabilités d'un RB

- Si on a un ensemble de données **où tous les nœuds X_i sont observés**, c'est facile :

$$P(X_i = x \mid Parents(X_i) = p) \approx \mathrm{freq}(x,p) \;/\; \Sigma_{x'}\, \mathrm{freq}(x',p)$$

- On fait ce calcul pour toutes les valeurs x de X_i et toutes les valeurs p de ses parents possibles
  - pour éviter d'avoir de probabilités à 0, on peut initialiser freq(x,p) = δ à une petite constante δ (ex. : δ=1)

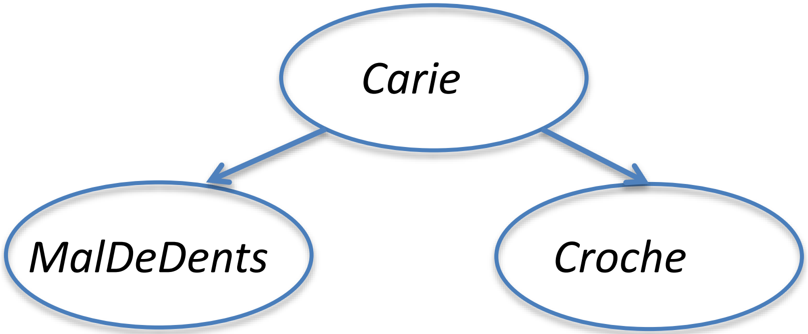


Exemple

- Supposons que l'on souhaite diagnostiquer une carie à l'aide du RB suivant:
  - ***MalDeDents***: le patient a mal aux dents
  - ***Croche***: la sonde s'accroche dans les dents
  - ***Carie***: le patient a une carie

- Supposons qu'on collecte un ensemble de données sur 120 patients où
  - 70 des 120 patients avaient une carie

P(Carie=vrai)=(70+1)/(70+1+50+1)=0.52

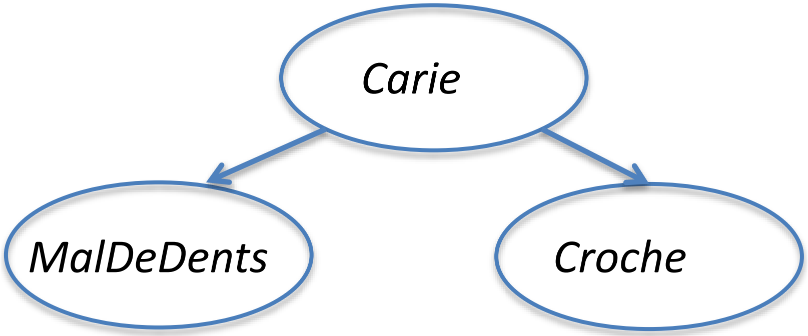


Exemple

- Supposons maintenant que dans mes données de 120 patients,
  - Parmi les 70 qui avaient une carie
    - 65 avaient mal aux dents
    - 51 ont la sonde qui s'accrochait

P(MalDeDents=vrai|Carrie=Vrai)=(65+1)/(65+1+5+1)=0.92

P(Croche=vrai|Carie=vrai)=(51+1)/(51 + 1 + 19 + 1)=0.72

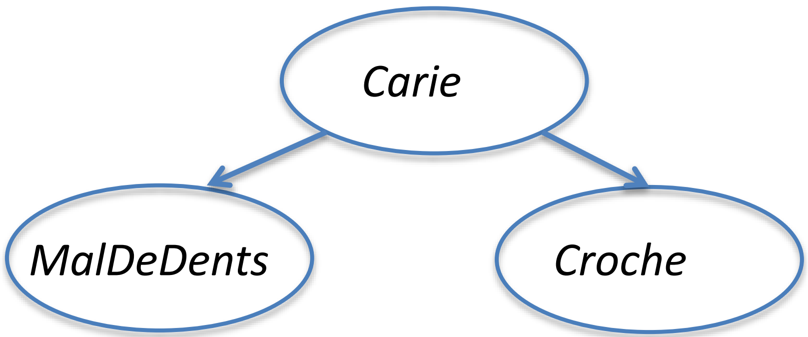


Exemple

- Supposons que dans mes données de 120 patients,
  - Parmi les 50 qui n'avaient pas de carie
    - 10 avaient mal aux dents
    - La sonde ne s'accrochait pour aucun d'eux

P(MalDeDents=vrai|Carrie=faux)=(10+1)/(10+1+42+1)=0.20

P(Croche=vrai|Carie=faux)=(0+1)/(0 + 1 + 50 + 1)=0.02



Spécifier les tables de probabilités d'un RB

- Si on a un ensemble de données où certaines des variables ne sont pas observées, on doit utiliser des méthodes plus sophistiquées.
  - Algorithme EM (voir section 20.3.2)

Construction de la structure du RB

1. Choisir un ordre des variables $X_1, \ldots, X_n$
2. Pour i = 1 to n :
   - ajouter X_i au réseau
   - choisir les parents $X_1, \ldots, X_{i-1}$ tels que $P(X_i \mid Parents(X_i)) = P(X_i \mid X_1, \ldots X_{i-1})$
   - ce choix garantit que :

     $P(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1})$ (*chain rule*)

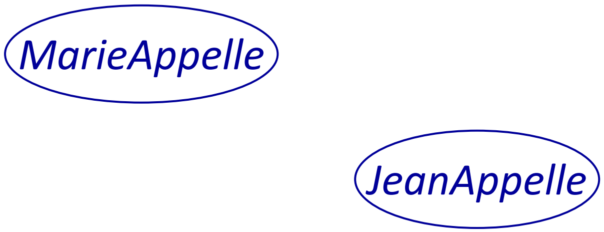
     $= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \mid Parents(X_i))$ (par construction)

- Pour construire un bon RB, sa structure doit refléter les indépendances conditionnelles du problème

- Dans quel ordre ajouter les nœuds au réseau?
  - mettre les « causes racines » d’abord, ensuite les nœuds qu’ils influencent directement

Exemple

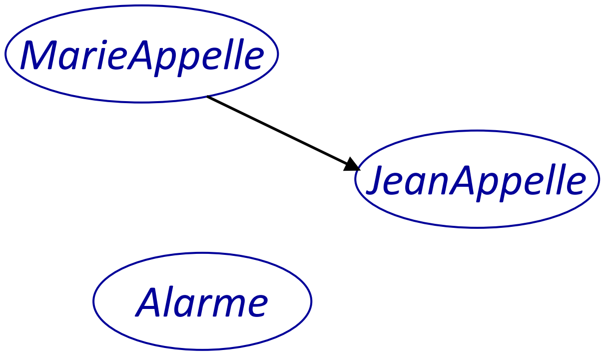
- Supposons qu'on ordonne les variables comme suit : *M*, *J*, *A*, *C*, *S*



- $P(J|M) = P(J)$?
-

Exemple

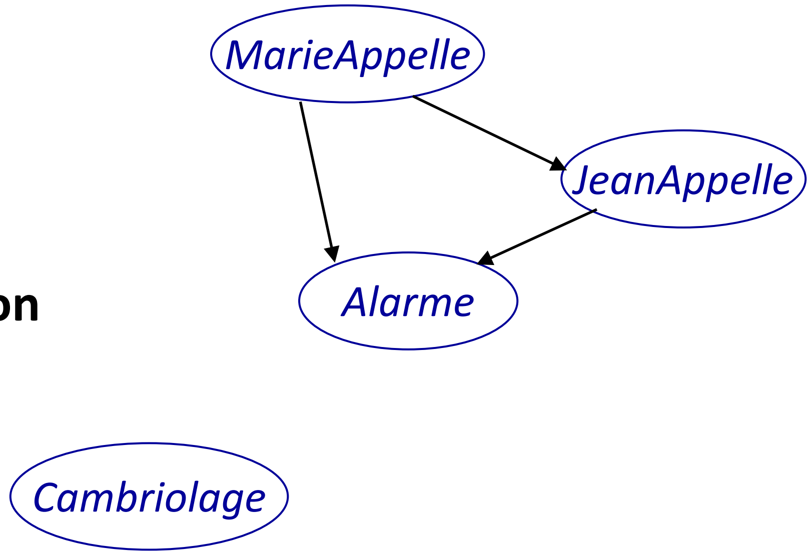
- Supposons qu'on ordonne les variables comme suit : *M*, *J*, *A*, *C*, *S*



- $P(J|M) = P(J)$? **Non**
- $P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$?

Exemple

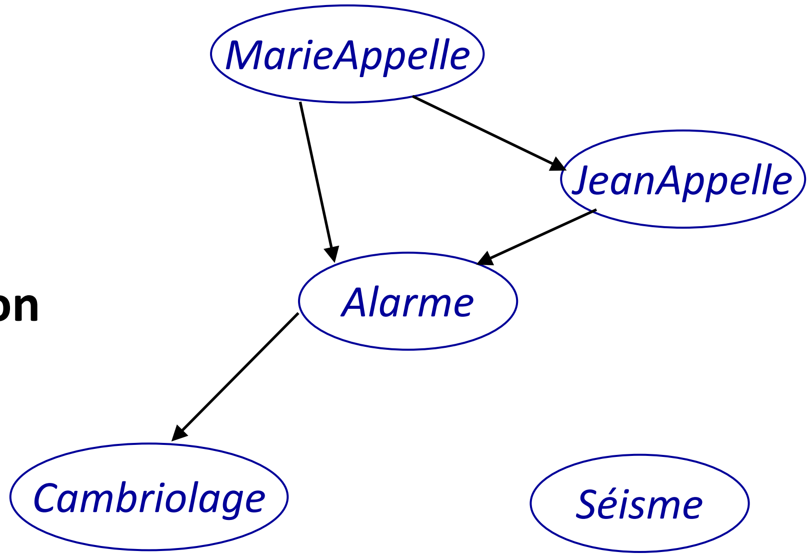
- Supposons qu'on ordonne les variables comme suit : *M, J, A, C, S*



- $P(J|M) = P(J)$? **Non**
- $P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$? **Non**
- $P(C|A,J,M) = P(C|A)$?
- $P(C|A,J,M) = P(C)$?

Exemple

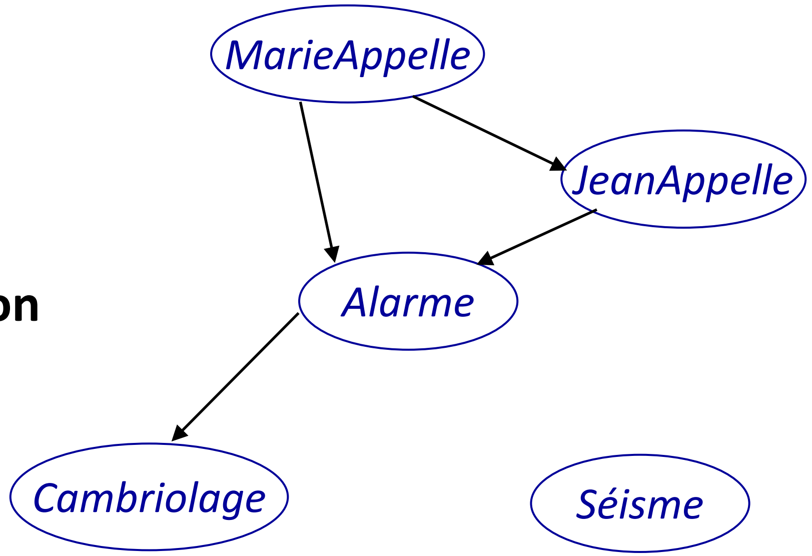
- Supposons qu'on ordonne les variables comme suit : *M, J, A, C, S*



- $P(J|M) = P(J)$? **Non**
- $P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$? **Non**
- $P(C|A,J,M) = P(C|A)$? **Oui**
- $P(C|A,J,M) = P(C)$?
- $P(S|C,A,J,M) = P(S|A)$?
- $P(S|C,A,J,M) = P(S|A,C)$?

Exemple

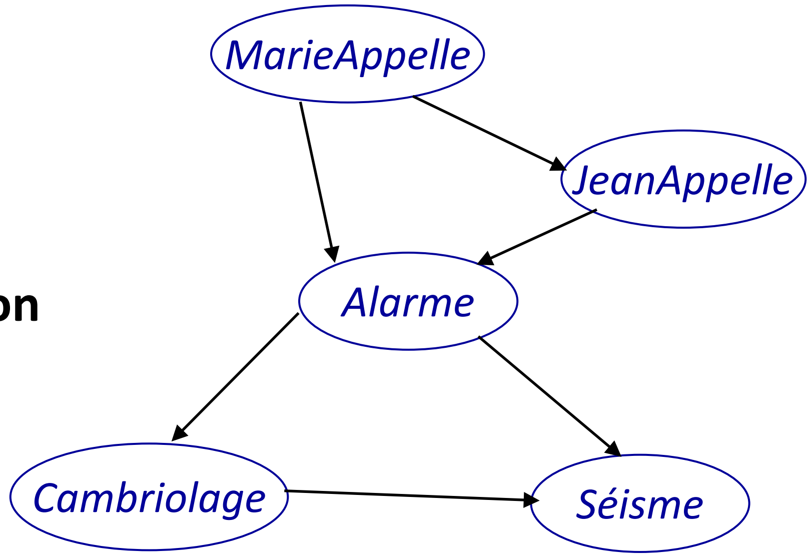
- Supposons qu'on ordonne les variables comme suit : *M, J, A, C, S*



- $P(J|M) = P(J)$? **Non**
- $P(A|J,M) = P(A|J)$? $P(A|J,M) = P(A)$? **Non**
- $P(C|A,J,M) = P(C|A)$? **Oui**
- $P(C|A,J,M) = P(C)$? **Non**
- $P(S|C,A,J,M) = P(S|A)$?
- $P(S|C,A,J,M) = P(S|A,C)$?

Exemple

- Supposons qu'on ordonne les variables comme suit : *M*, *J*, *A*, *C*, *S*



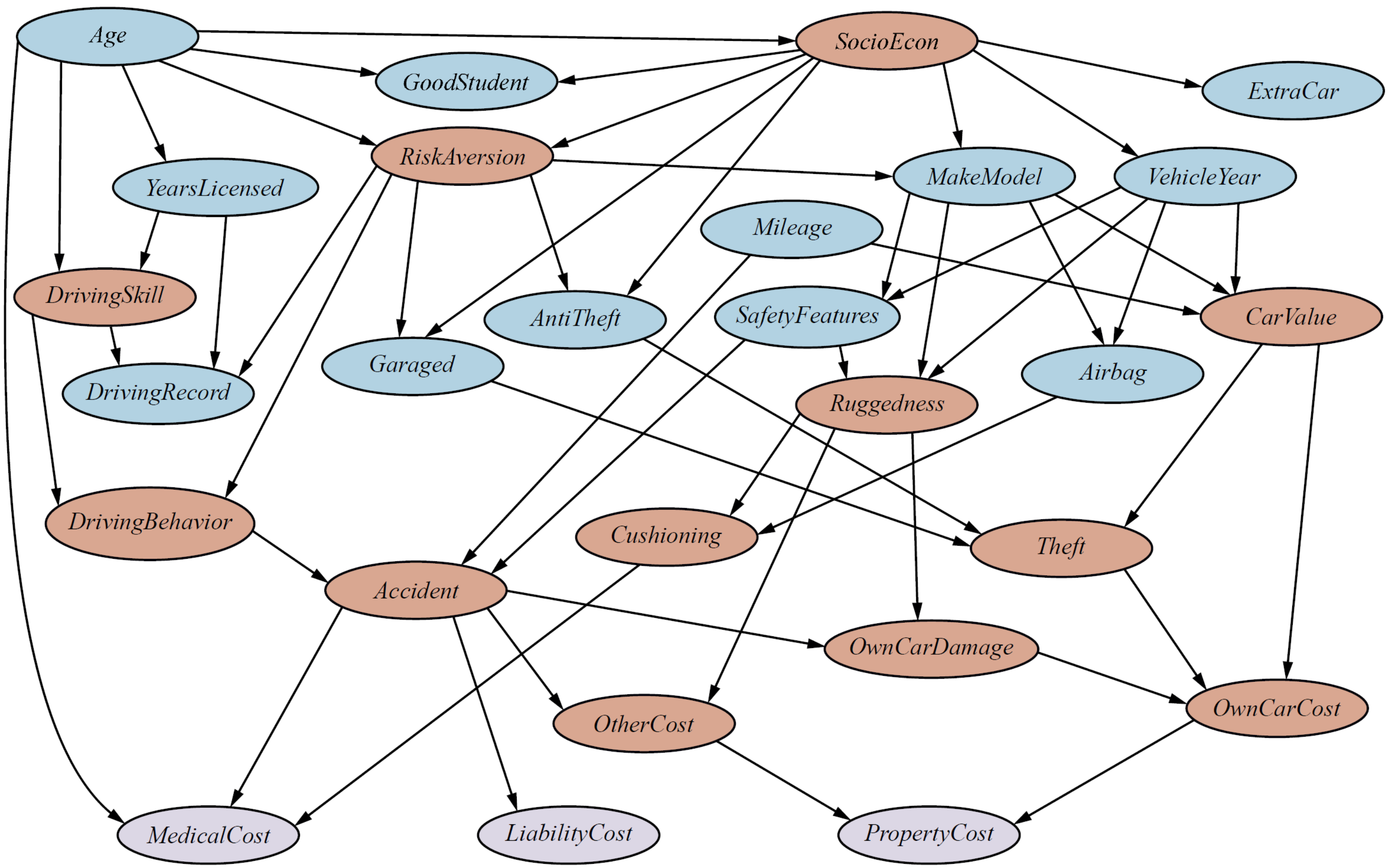
- $P(J \mid M) = P(J)$? **Non**
- $P(A \mid J,M) = P(A \mid J)$? $P(A \mid J,M) = P(A)$? **Non**
- $P(C \mid A,J,M) = P(C \mid A)$? **Oui**
- $P(C \mid A,J,M) = P(C)$? **Non**
- $P(S \mid C,A,J,M) = P(S \mid A)$? **Non**
- $P(S \mid C,A,J,M) = P(S \mid A,C)$? **Oui**

Exemple

- Déterminer l'indépendance conditionnelle est très difficile dans le sens non causal
  - par exemple, en médecine, souvent les experts préfèrent donner des probabilités dans le sens causal (pathologie → symptôme) plutôt que dans le sens diagnostique

- Un réseau avec des dépendances diagnostiques (effet → cause) est généralement moins compacte
  - dans le cas présent : 1 + 2 + 4 + 2 + 4 = 13 nombres pour représenter les tables de probabilité conditionnelle du réseau au lieu de 10 pour la première version

RB pour évaluation des applications pour l'assurance auto



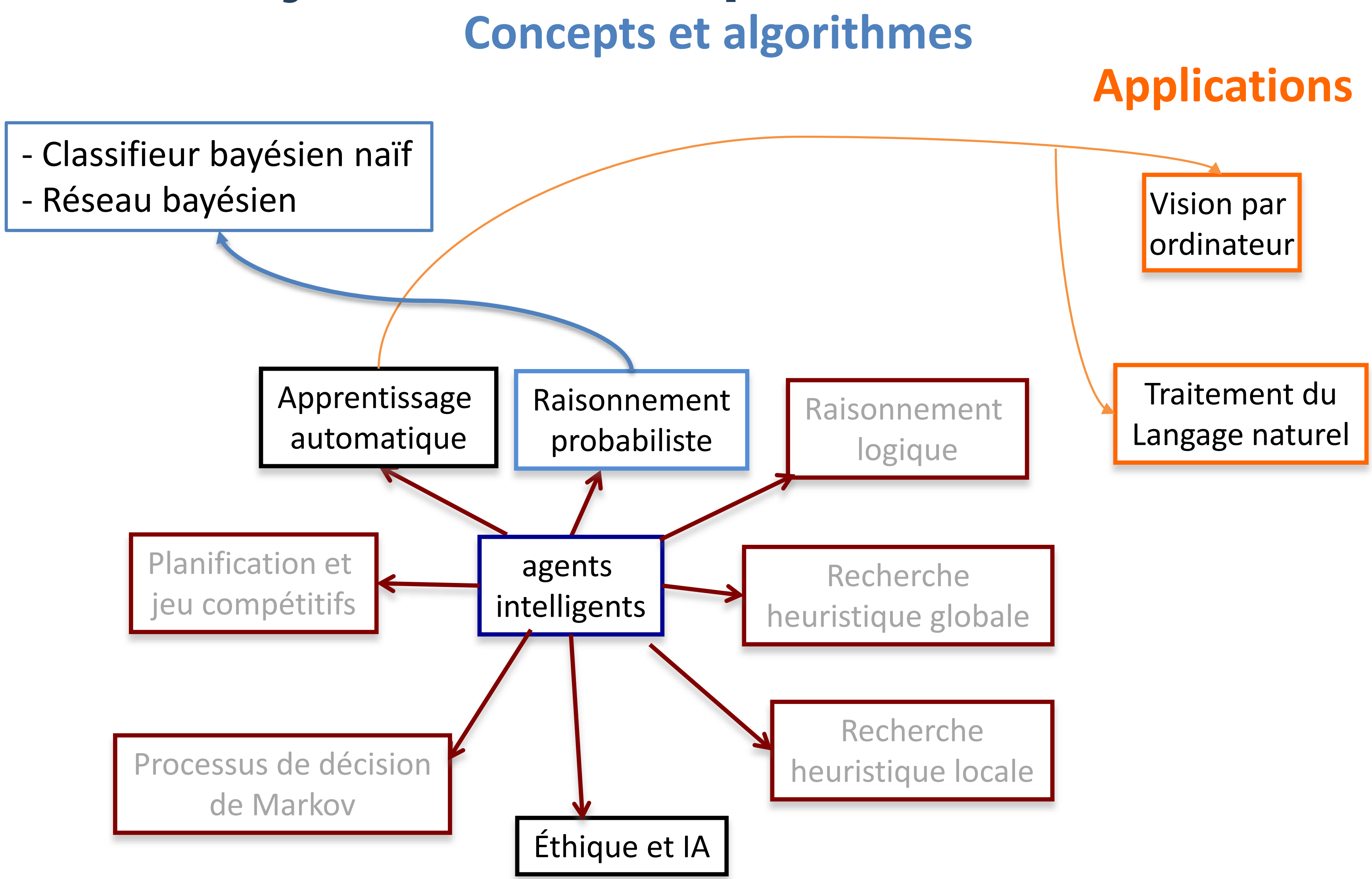
Résumé

- Un RB est un graphe orienté, acyclique, représentant des connaissances causales, et reflétant les dépendances conditionnelles entre des variables
- La topologie du réseau (arcs entres les variables) et les TPC donnent une représentation compacte de la distribution conjointe des probabilités
- Les connaissances du réseau (liens de causalité et probabilités) sont généralement obtenus avec l'aide d'un expert
  - pour des applications concrètes, ceci peut être très laborieux

Vous devriez être capable de...

- Décrire ce qu'est un réseau bayésien :
  - qu'est-ce que la topologie représente
  - quelle est la distribution conjointe associée à un réseau bayésien
- Étant donné un réseau bayésien :
  - calculer une probabilité conjointe, marginale, conditionnelle
  - dire si deux variables sont (conditionnellement) indépendantes
- Décrire l'inférence par énumération exacte
- Décrire la méthode de rejet pour l'inférence dans un RB

Sujets couverts par le cours



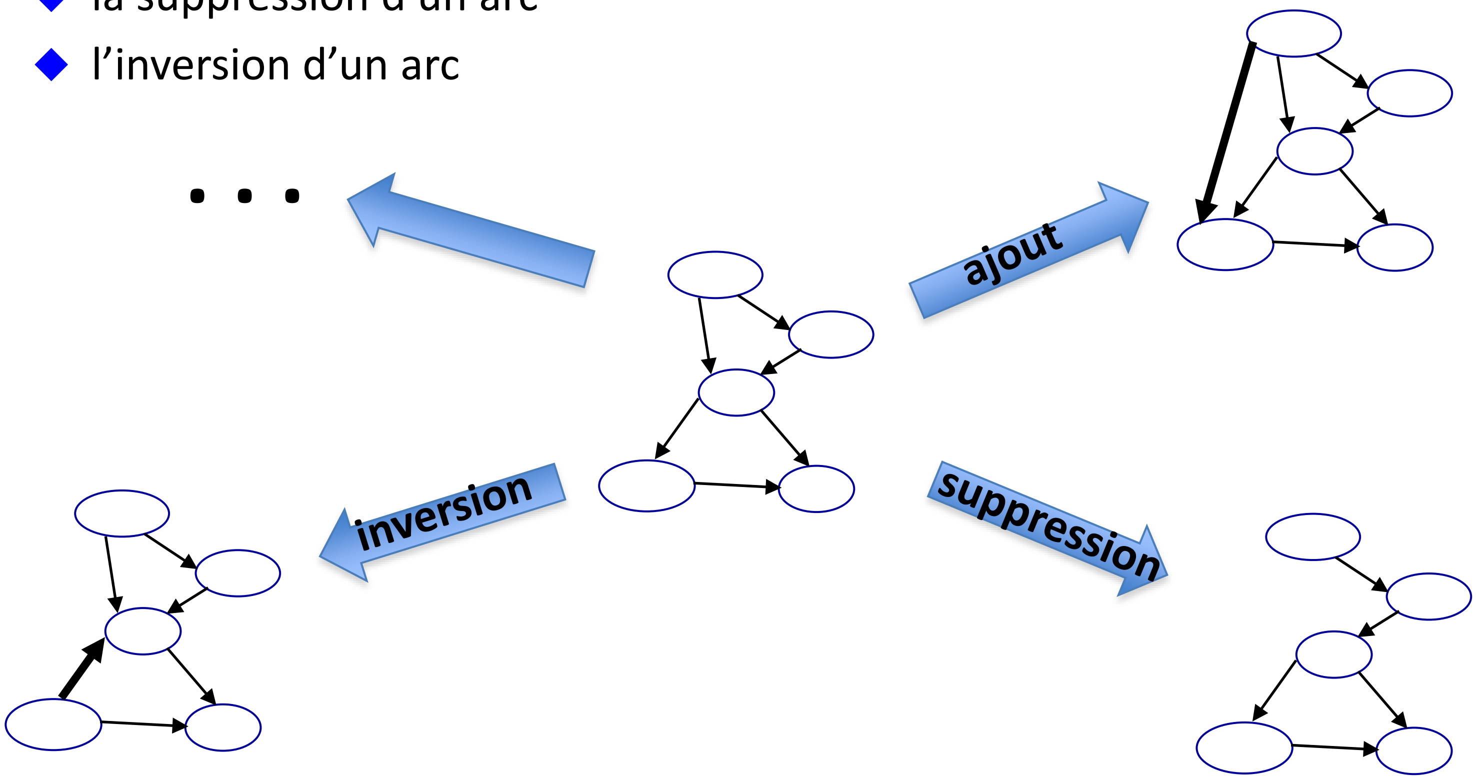
LA PARTIE SUIVANTE N’EST PAS COUVERTE POUR LES EXAMENS

Génération automatique de la structure du RB

- Quoi faire si on n'a pas accès à un expert pour nous donner un bon graphe de RB ?
- On peut aussi tenter d'obtenir la structure du RB à partir de données, à l'aide de la recherche locale (par exemple *Hill Climbing* que nous verrons plus tard dans le cours) :
  1. on débute avec un **graphe acyclique aléatoire** comme graphe courant
  2. on **obtient ses tables de probabilités** à partir des fréquences d'observation du graphe courant
  3. on utilise la recherche locale pour **générer des graphes successeurs** du graphe courant
      4. on obtient les tables de probabilités du graphe successeur
      5. on remplace le graphe courant par le successeur s'il est « meilleur »
  3. on retourne à 2. jusqu'à un certain critère d'arrêt

Génération automatique de la structure du RB

- On génère des successeurs à partir des modifications au graphe suivantes
  - l'ajout d'un arc
  - la suppression d'un arc
  - l'inversion d'un arc



Génération automatique de la structure du RB

- La fonction objective à maximiser par la recherche locale est :

$$\underbrace{\Sigma_t \log \; P(X_1 = x_1^t,\ldots,X_n=x_n^t)}_{\textbf{log probabilité des données}} \; - \; \underbrace{M\,(\log T)\,/\,2}_{\textbf{complexité du graphe}}$$

  - $\{x_1^t,\ldots, x_n^t\}$ est la $t^{\text{ième}}$ donnée de mon ensemble de T données
  - M est le nombre de paramètres requis par les tables de probabilités conditionnelles du réseau bayésien
- On cherche donc un graphe
  - qui **explique bien les données** (leur donne une haute probabilité)
  - qui est **compacte** (qui a peu de paramètres)