IFT 608 / IFT 702
Planification en intelligence artificielle

Rappel:
Processus de décision markoviens

Professeur: Froduald Kabanza

Assistants: D'Jeff Nkashama & Jordan Félicien Masakuna

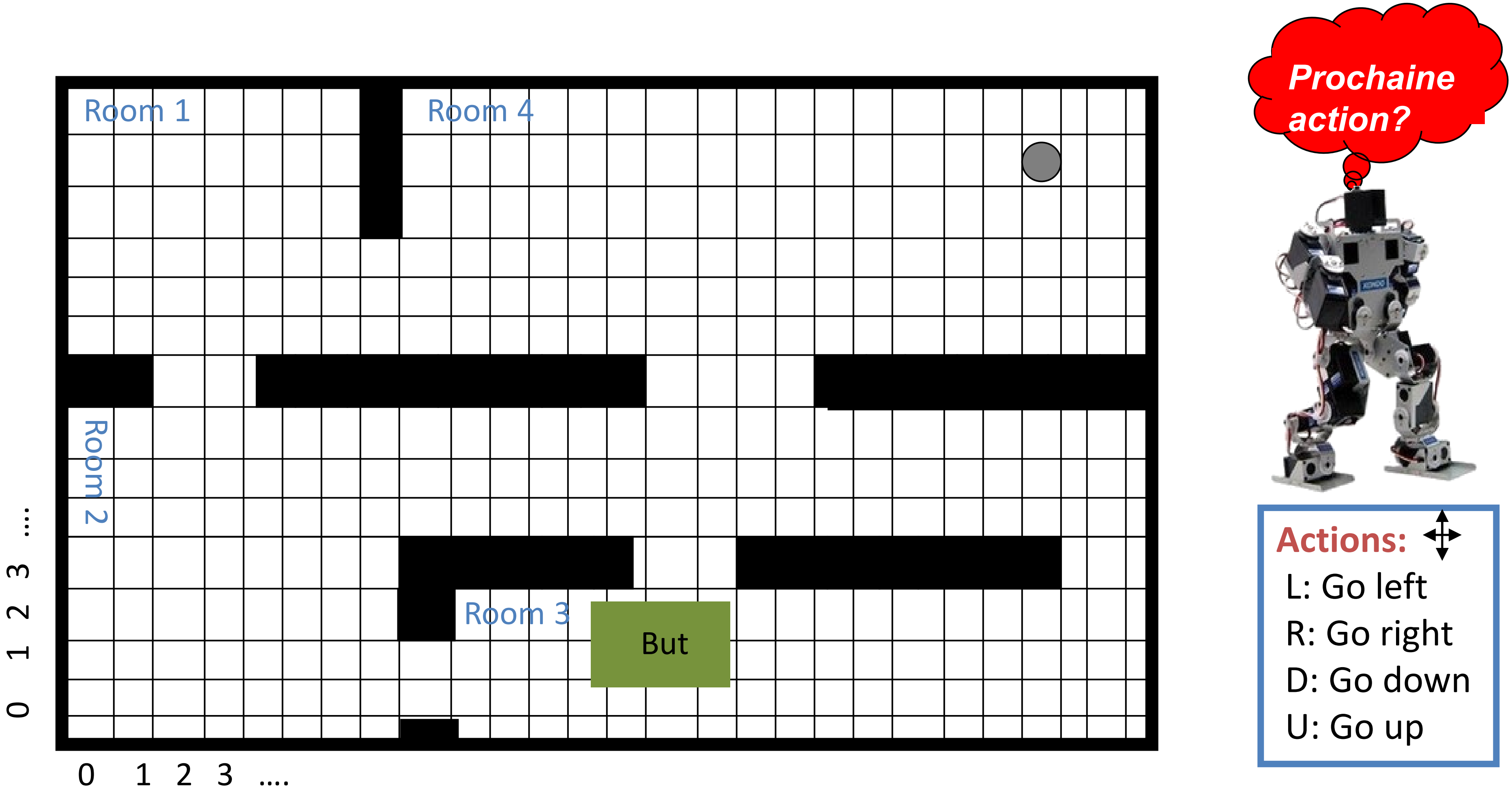
Université de Sherbrooke

Sujets couverts

Sections 3 et 4.1à 4.6 de Sutton & Barto

- *MDP*
- *Reward*
- *Policy*
- *Value function*
- Équations de Bellman
- *Q function* (state-action pairs)
- Programmation dynamique
  - *Value iteration*
  - *Policy Iteration*
- *Asynchronous Policy Iteration*
- *Generalized Policy Iteration*

Motivation –
Planification avec des actions ayant des effets incertains



Actions:

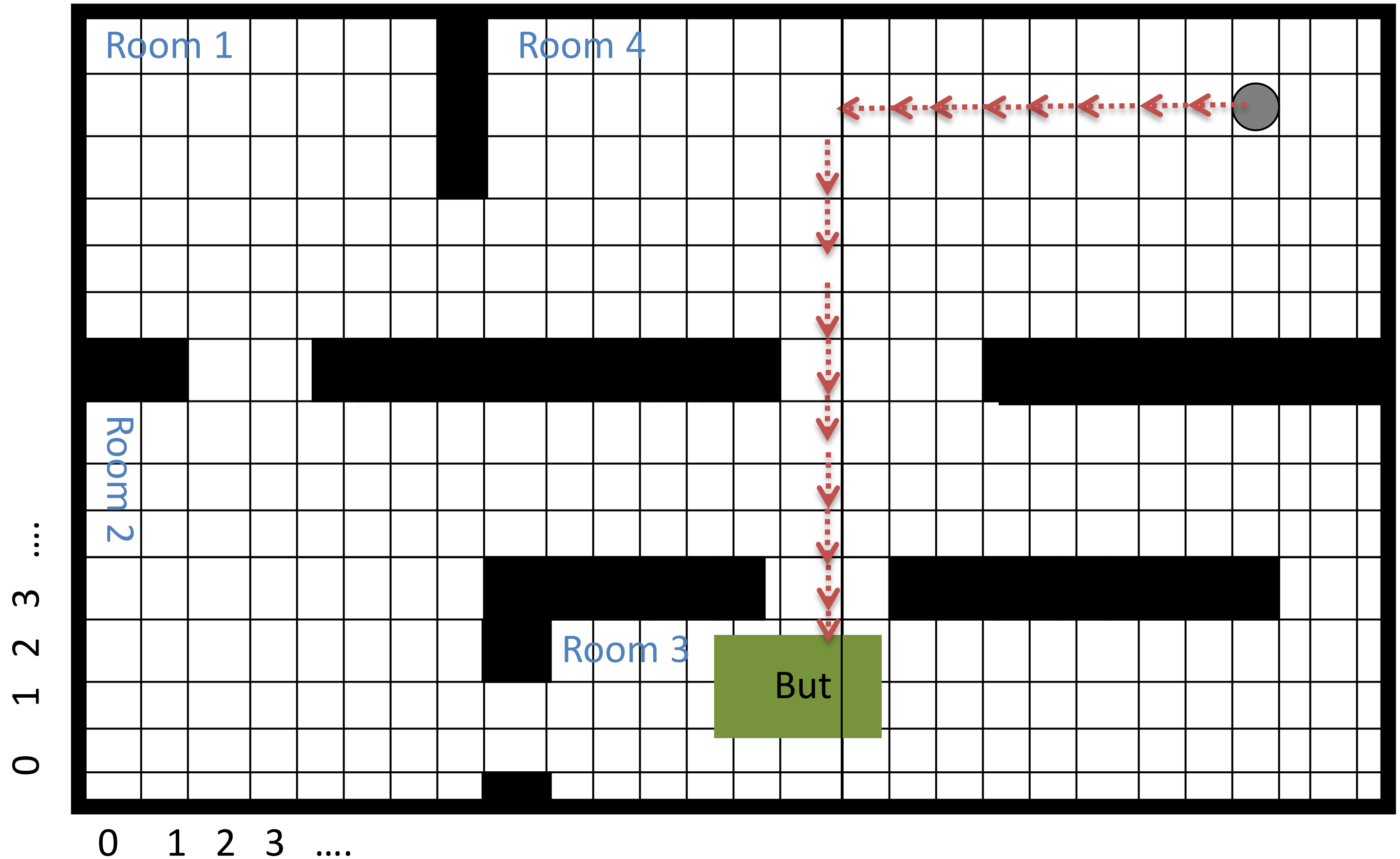
L: Go left

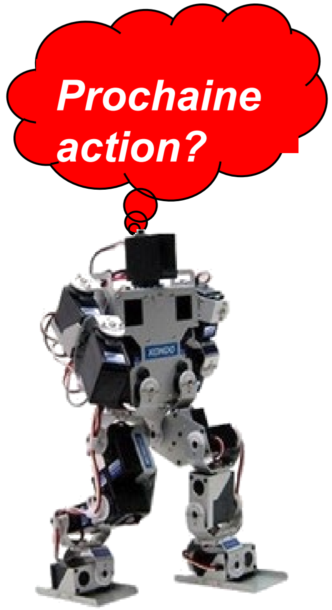
R: Go right

D: Go down

U: Go up

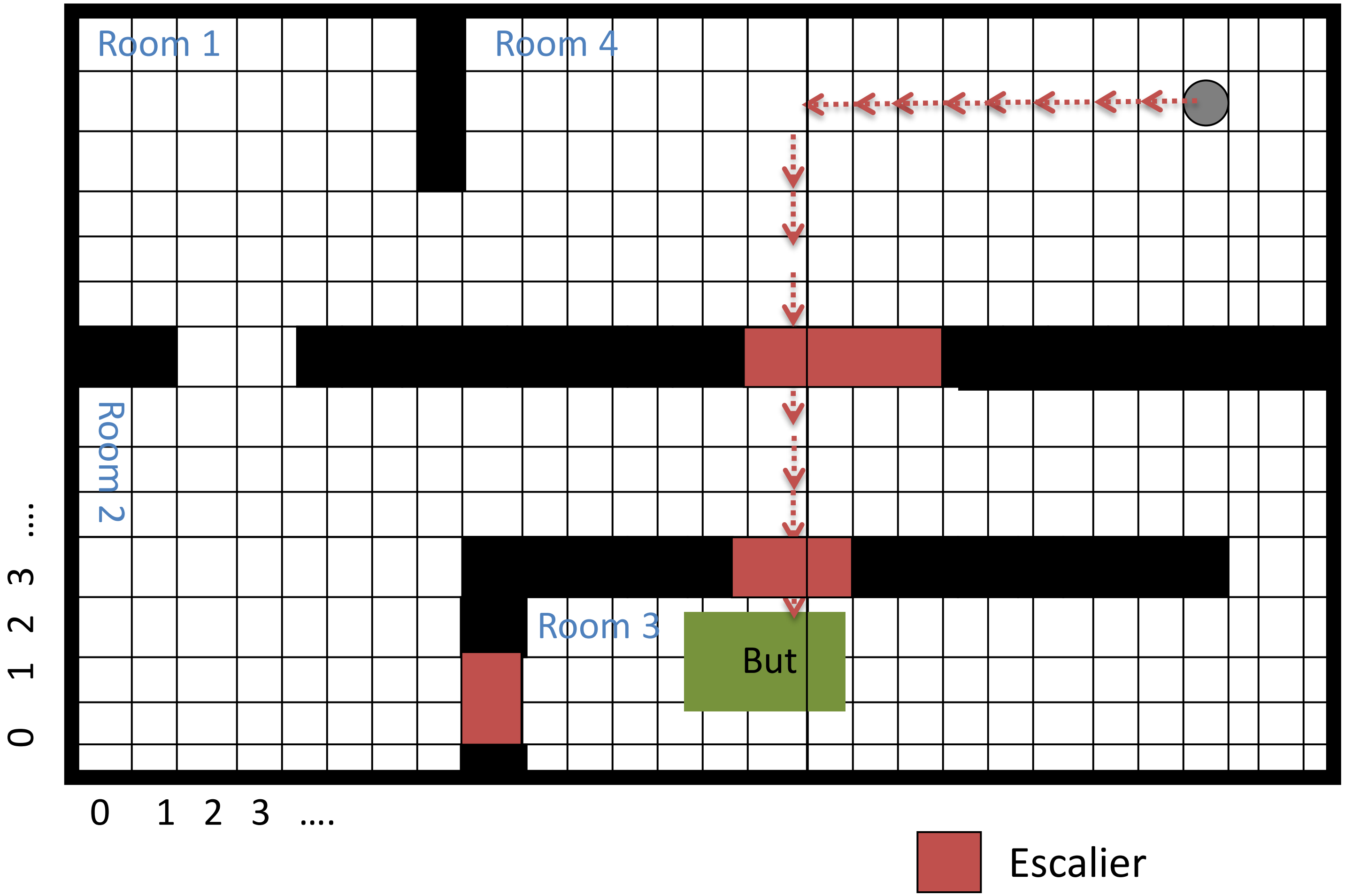
Motivation – Planification avec des actions ayant des effets incertains

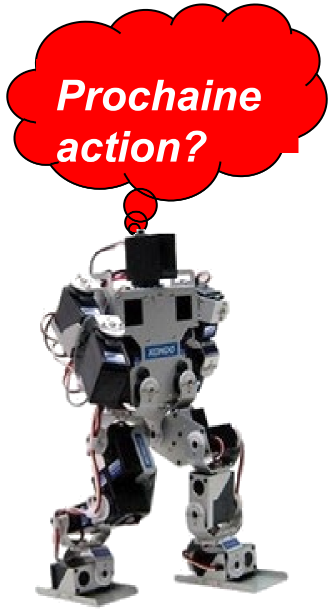




Actions:
- L: Go left
- R: Go right
- D: Go down
- U: Go up

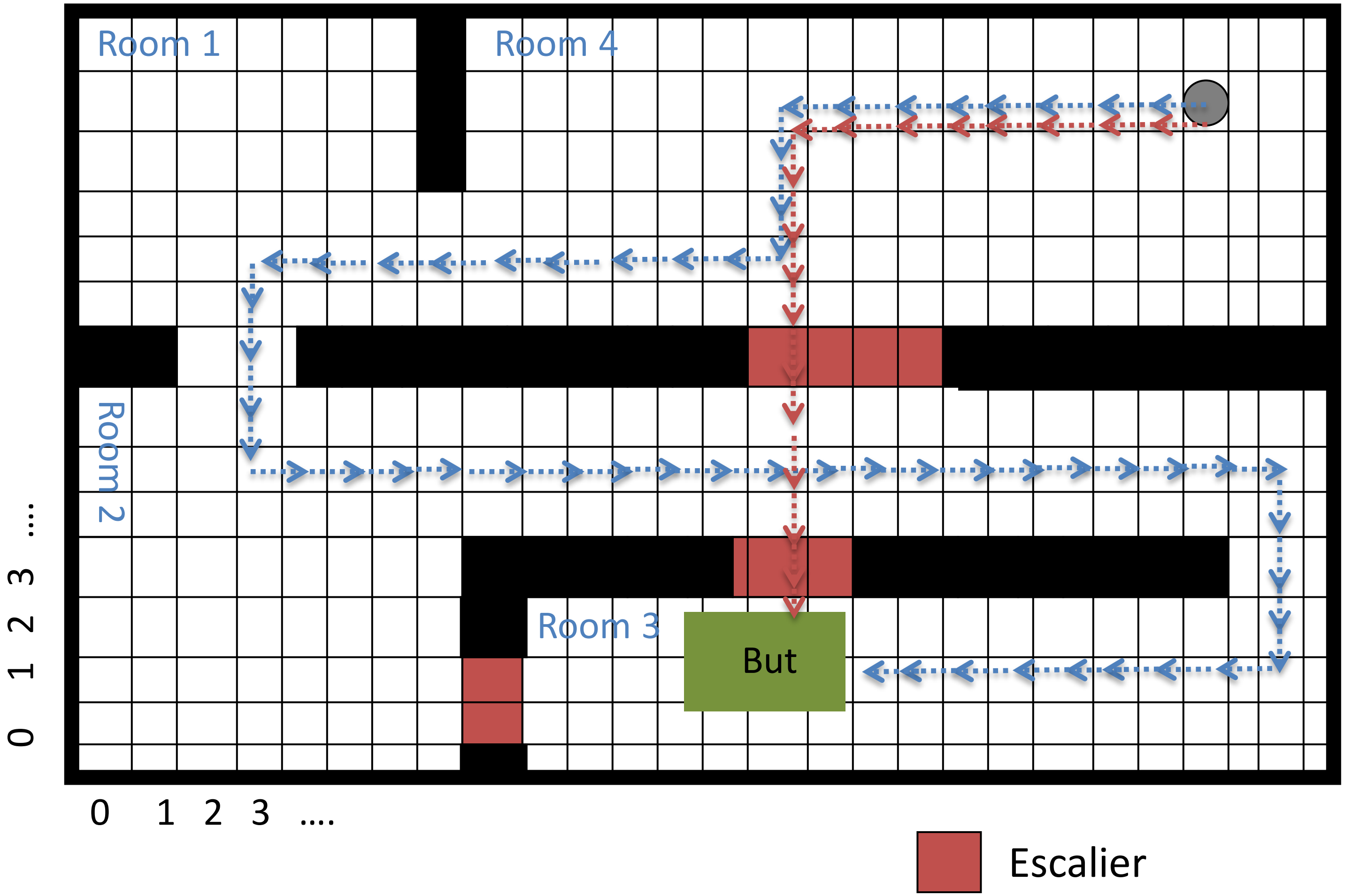
Motivation – Planification avec des actions ayant des effets incertains

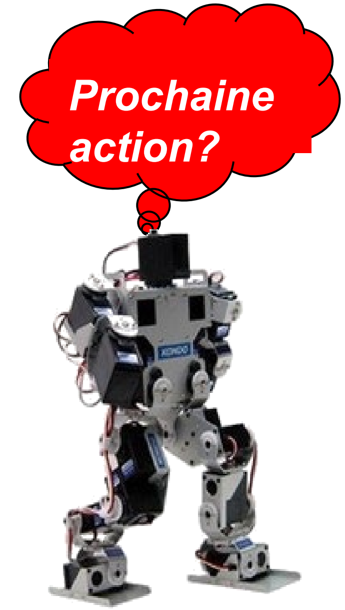




Actions:
- L: Go left
- R: Go right
- D: Go down
- U: Go up

Motivation – Planification avec des actions ayant des effets incertains





Actions:

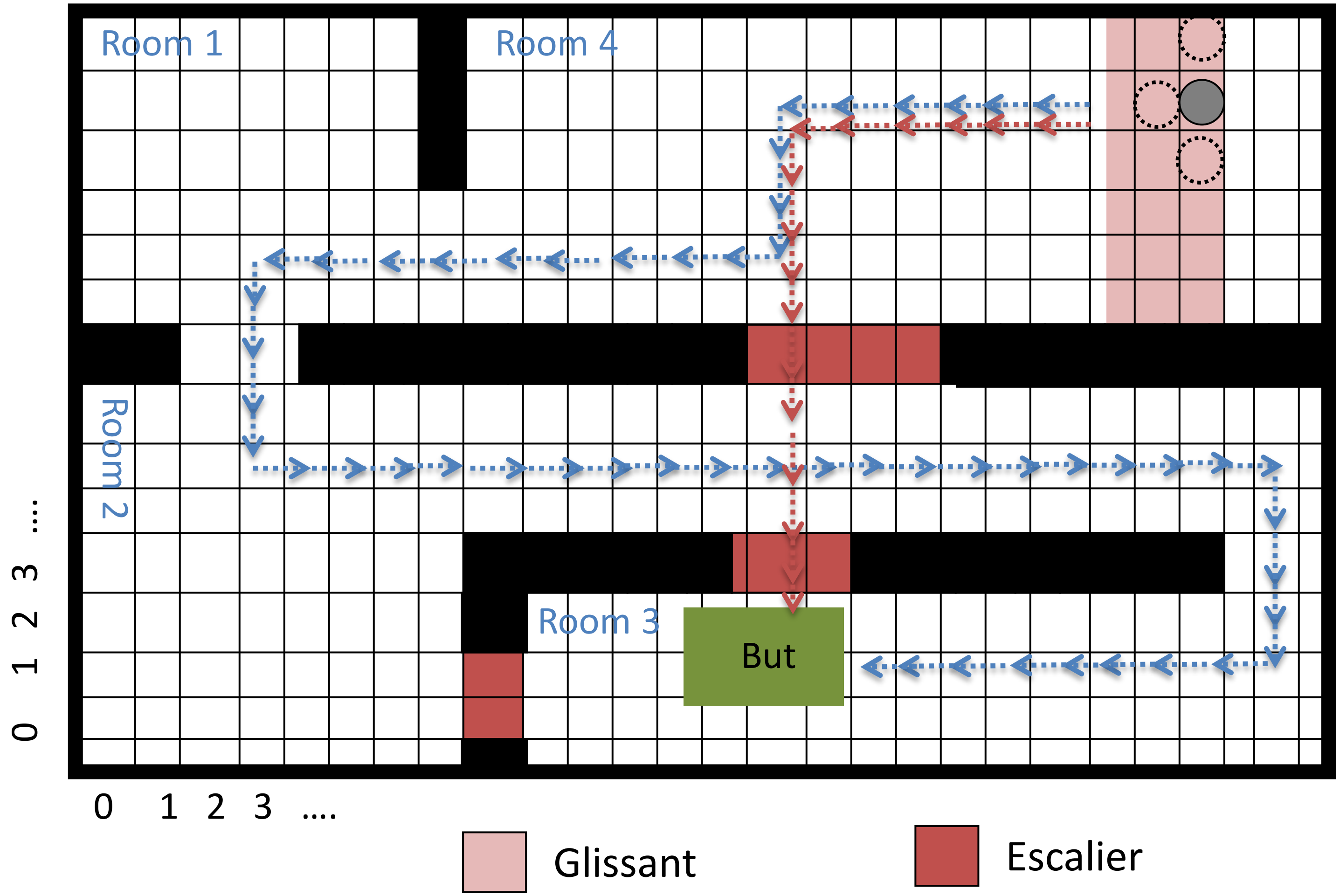
L: Go left

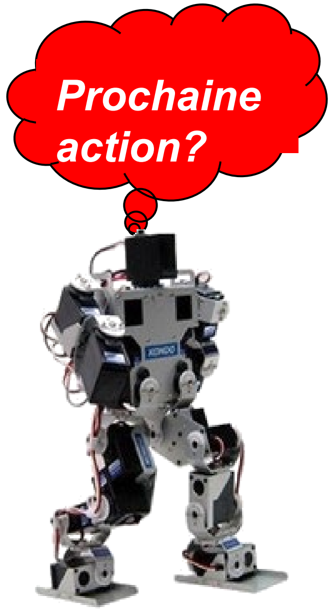
R: Go right

D: Go down

U: Go up

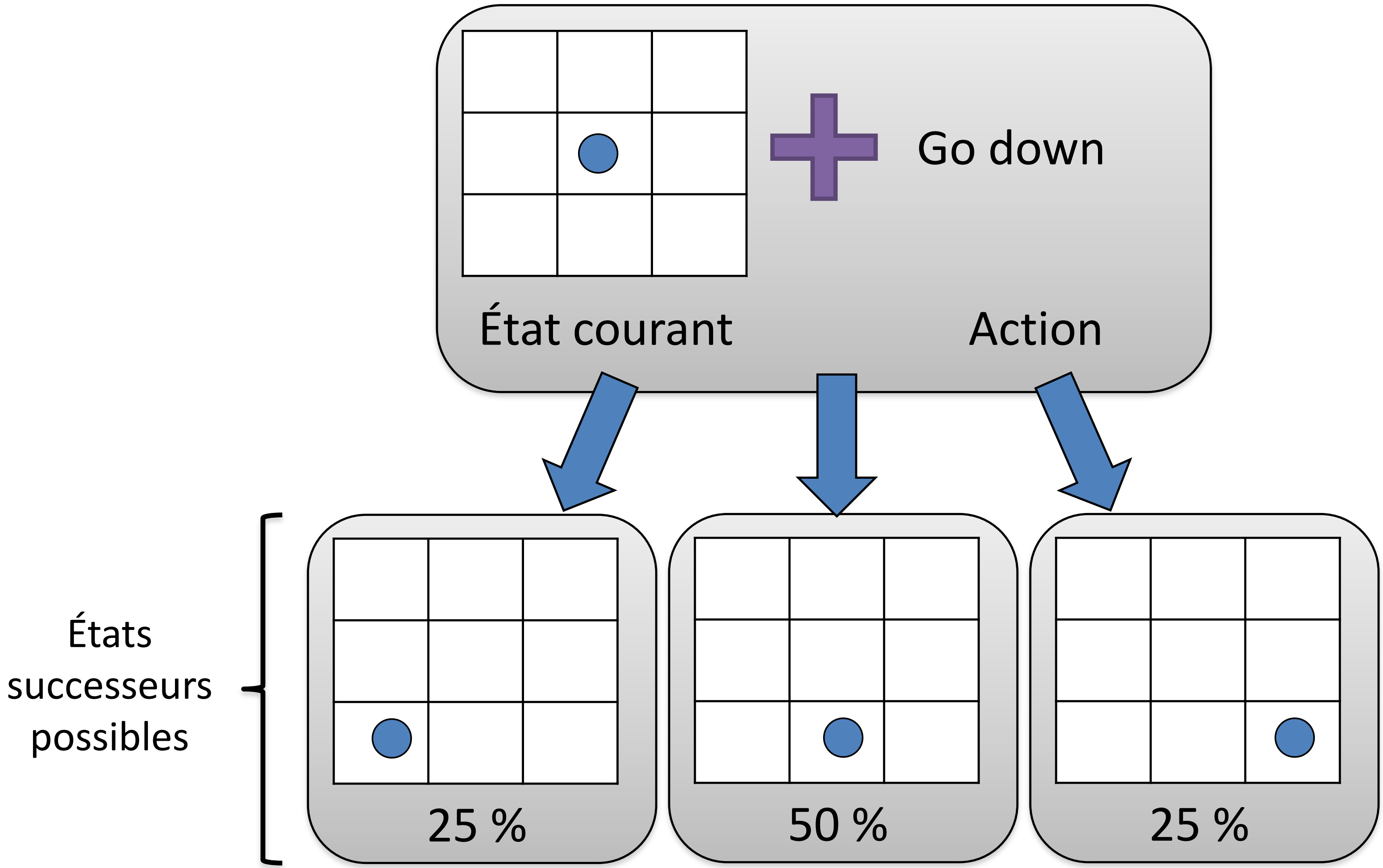
Motivation – Planification avec des actions ayant des effets incertains





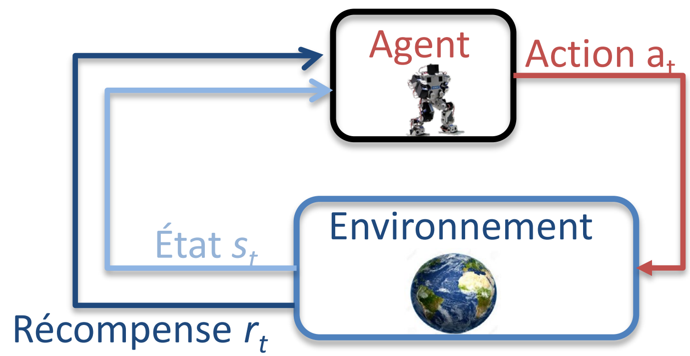
Actions:
- L: Go left
- R: Go right
- D: Go down
- U: Go up

MDP : actions non déterministes



Processus de décision markovien
Idée de base

- La planification par les **processus de décision Markoviens** s'intéresse au cas où un agent doit **décider comment agir** en tenant compte d'une fonction d'utilité **exprimée sous forme des récompenses** ou **renforcements**



- Exécution (comportement) de l'agent: $s_0 \xrightarrow[r_0]{a_0} s_1 \xrightarrow[r_1]{a_1} s_2 \xrightarrow[r_2]{a_2} \cdots$
  - L'agent **agit** sur son environnement
  - Reçoit une retro-action sous-forme de **récompense (renforcement)**
  - Son **but** est de maximiser la somme des recompenses espérés

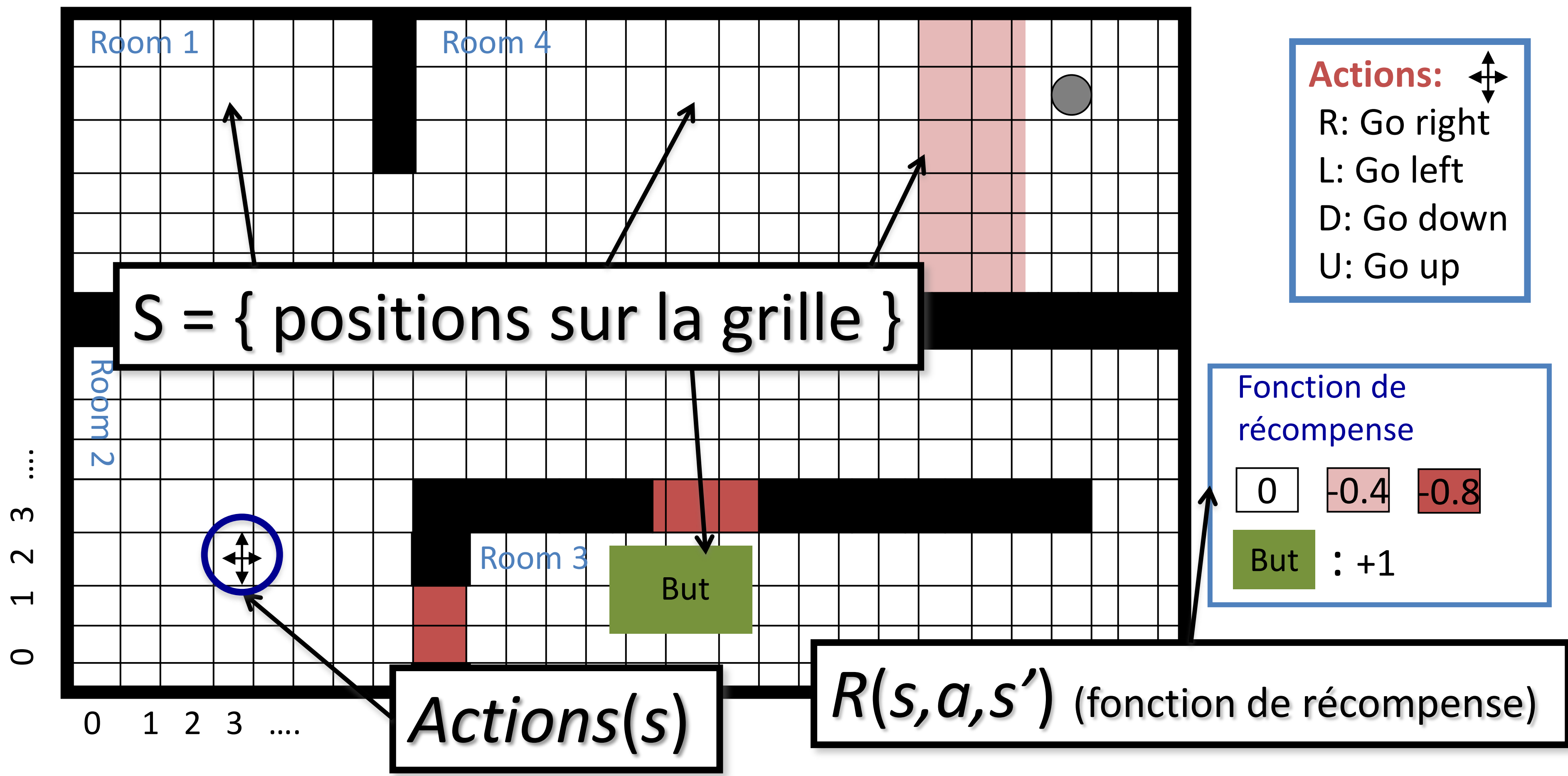
- Problème: **Calculer la politique (plan) qui** maximiser la somme des recompenses

$$r_0 + \gamma r_1 + \gamma^2 r_2 + \cdots, \quad \text{avec } 0 \leq \gamma \leq 1 \text{ et } r_i < R_{max}$$

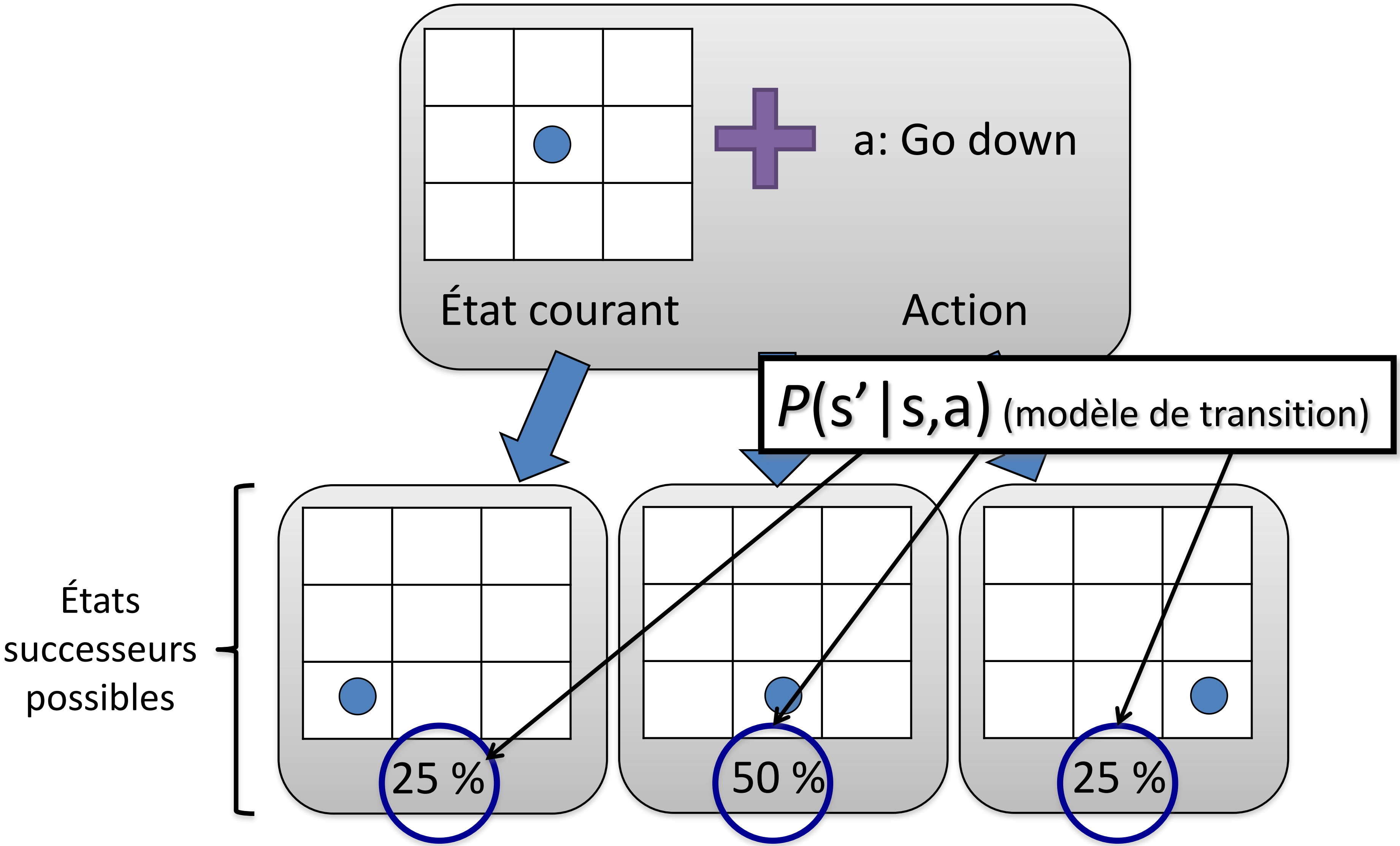
Processus de décision markovien
Définition Formelle

- Un **processus de décision markovien** (***Markov decision process***, ou **MDP**) est défini par:
  - un **ensemble d'états** S (incluant un étant initial s_0)
  - un **ensemble d'actions** possibles $A(s)$ lorsque je me trouve à l'état s
  - un **modèle de transition** $P(s'|s, a)$, où a $\in A(s)$
  - une **fonction de récompense** $R(s)$ (utilité d'être dans l'état s)
- Un MDP est donc un modèle général pour un environnement stochastique dans lequel un agent peut prendre des décisions et reçoit des récompenses
- On y fait une supposition markovienne (de premier ordre) sur la distribution des états visités
- Requière qu'on décrive un objectif à atteindre à partir d'une fonction de récompense basée seulement sur l'état courant

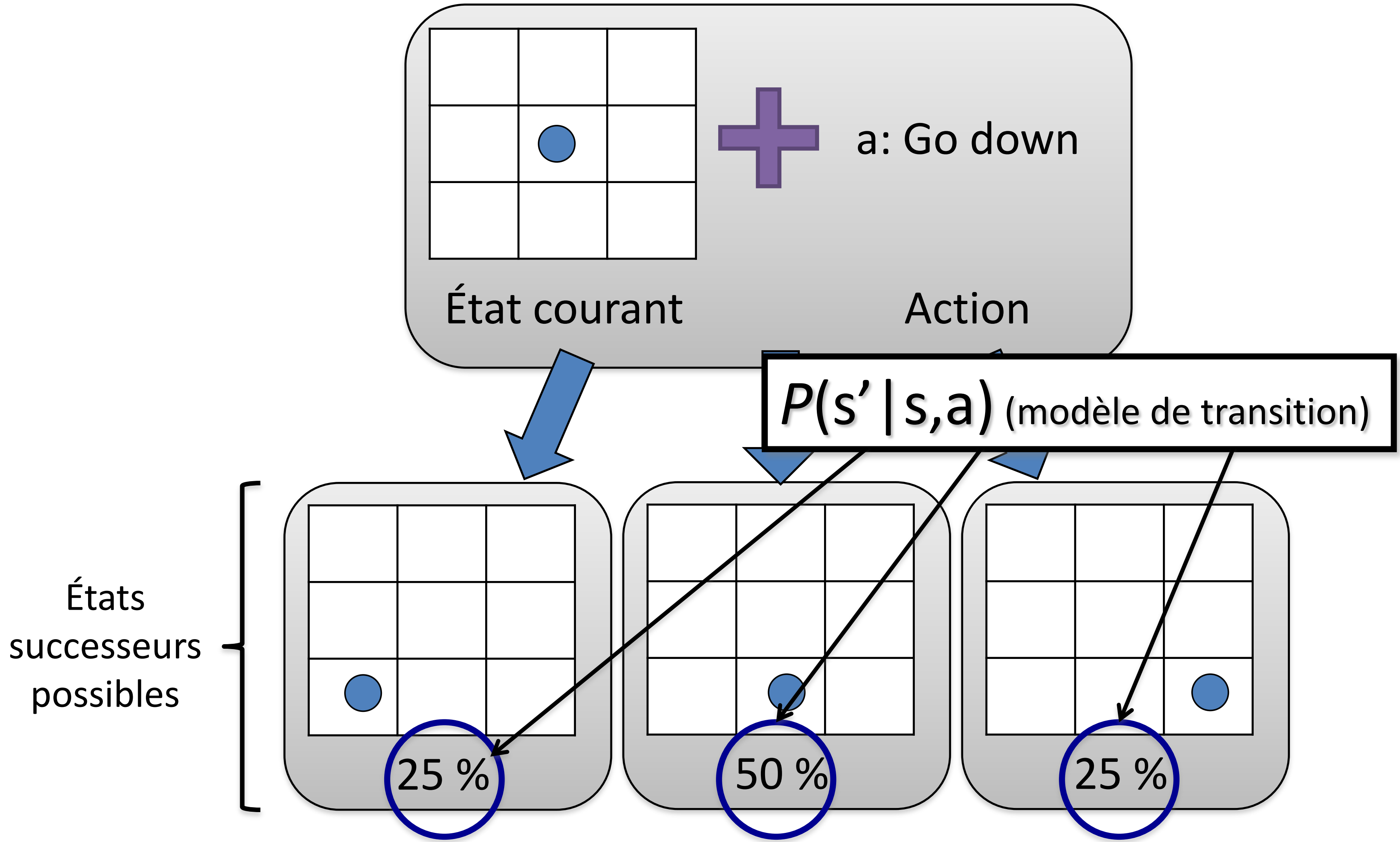
Modèle d'actions



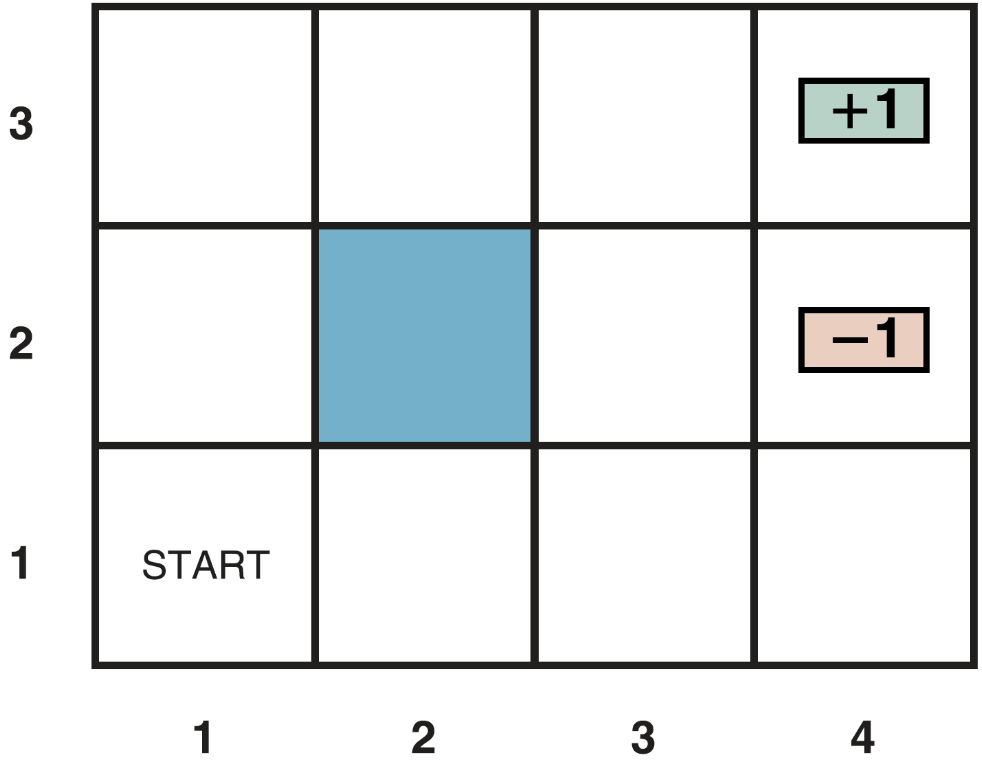
Actions aux effets incertains

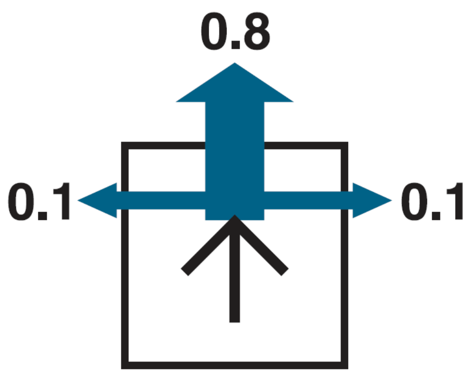


Actions aux effets incertains



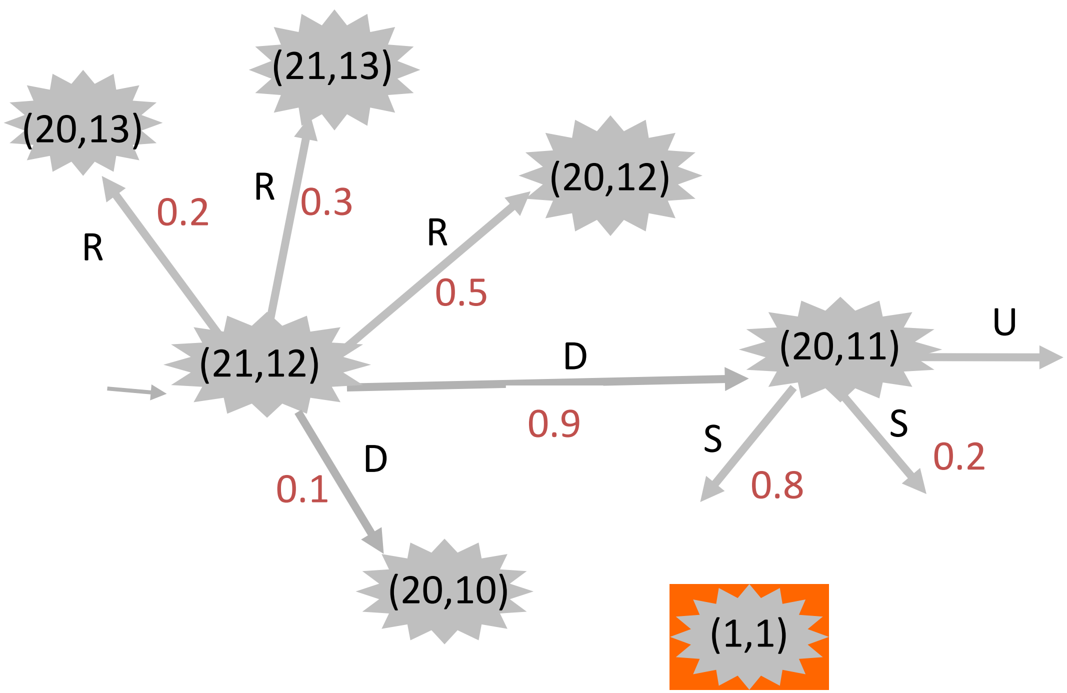
Exemple





Décision

- Une **décision** est un choix d'une action dans un état
  - c'est une règle « *if state then action* »



Exemples:

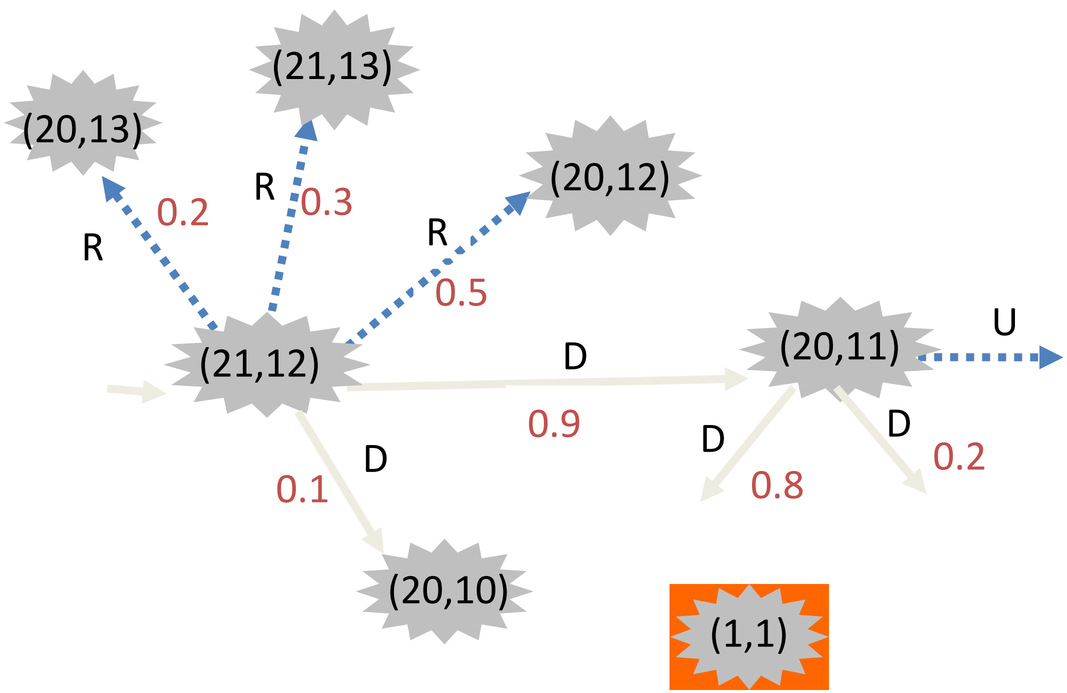
(21,12) → R

ou

(19,12) → L

Politique (plan)

- Un **politique** (***policy***) est un choix d'une action (décision) **pour chaque état**
  - une politique est également appelé un plan
  - c'est un **ensemble** de règles *if state then action*



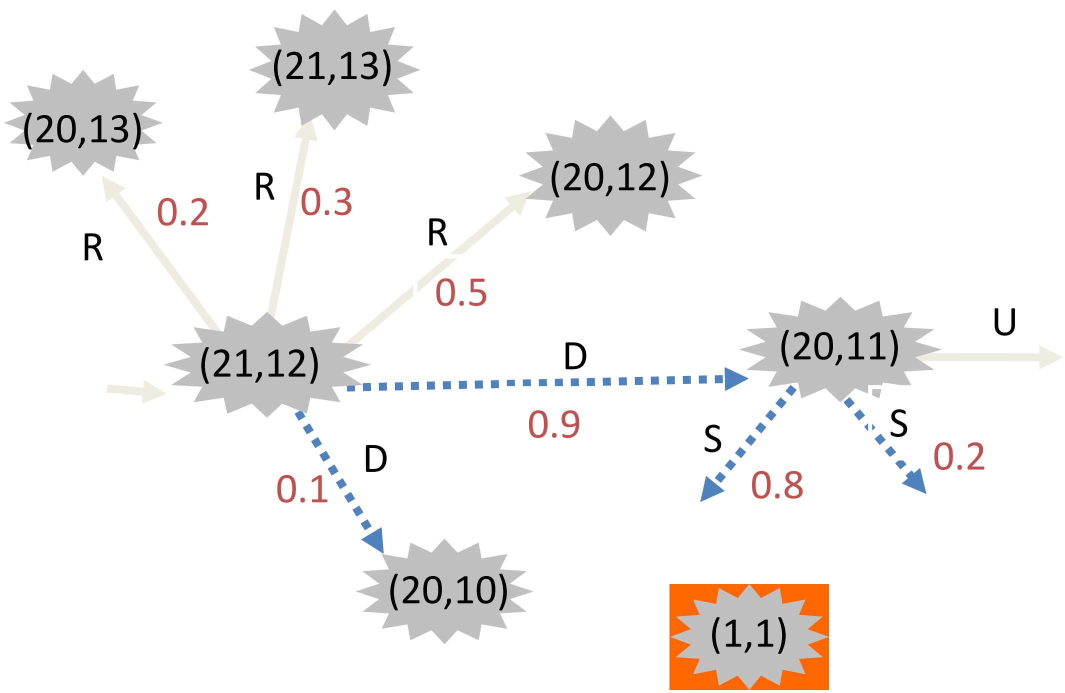
Exemples:

Plan π1

{ (21,12) → R,
(20,13) → U,
(21,11) → D,
(19,12) → L,
…
}

Politique

- Un **politique** est un choix d'une action **pour chaque état**



Exemples:

Plan π1

{ (21,12) → R,
(20,13) → U,
(21,11) → D,
(19,12) → L,
…
}

Plan π2

{ (21,12) → R,
(20,11) → D,
(19,12) → L,
….}

Exécution d'une politique

- Une politique est un choix d'action pour chaque état
- Notons π(*s*) l'action choisie pour l'état *s*
- Voici un algorithme d'exécution ou d'application de la politique π

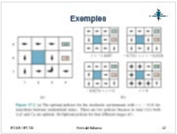
```
While (1)
{
    1.  s = état courant du système;
    2.  a = π(s);
    3.  execute a;
 }
```

- L'étape 1 peut impliquer du filtrage pour reconnaître l'état courant *s*
- L'état résultant de l'exécution de l'action à l'étape 3 est imprévisible

Horizon fini vs Horizons infini

- Horizon fini:

  - L'exécution termine après un nombre fini d'étapes.
  - On peut utiliser $\gamma=1$, la somme des récompenses demeurera finie.
  - Pour un horizon fini, le temps a de l'importance. La **politique est non stationnaire**.



- Horizon infinie:
  - L' exécution ne termine pas (des boucles)

  - Il faut utiliser $0 \leq \gamma < 1$ pour que la somme des récompenses soient finie

$$U([r_0, \ldots r_\infty]) = \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t \leq R_{\max}/(1-\gamma)$$

  - **La politique est stationnaire**. Le temps n'a pas d'importance.

Fonction de récompense/utilité et qualité des plans

- Une fonction de récompense/utilité, R(s), assigne un nombre réel à chaque état s.
  - R(s) désigne le degré de désirabilité de l'état s.
- Le but et le coût des actions sont indirectement modélisés par la fonction de récompense/utilité.
- Ainsi, la qualité d'un plan est déterminée par l'espérance des récompenses qu'on peut potentiellement obtenir en suivant/exécutant le plan
  - Un plan optimal est celui qui maximise les récompenses.
  - Plus un plan est proche de l'optimal optimal, plus il est de qualité.
- Ainsi un plan fait un compromis entre:
  - La maximisation de la probabilité d'atteindre le but (réduction de la probabilité d'échec).
  - La maximisation des récompenses (optimisation du coût des actions).

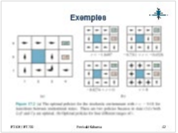
Utilité d'une politique

- L'**utilité** d'une politique (plan) π exécutée à partir à l'état *s* est donnée par

$$U^{\pi}(s) = E\ [\ \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^{t}\, R(st,\ \pi(s),st_{+1)}\ ]$$

$$= \Sigma_{s' \in S}\ P(s'|s,\pi(s))\ [\ R(s,\pi(s),s') + \gamma\ U^{\pi}(s')\ ]$$

c.-à-d., la somme des récompenses futures espérées pondérées par les probabilités de transition



- γ: facteur d'escompte ($0 \leq \gamma \leq 1$)
- $R(s,a,s')$: **récompense** pour la transition (s,a,s')
- S: espace d'états
- $\pi(s)$: action du plan à l'état *s*
- $P(s'|s, \pi(s))$: probabilité de la transition du MDP

Rôle du facteur d'escompte

- Le facteur d'escompte permet de pondérer les récompenses selon l'importance d' « agir bien » dans un horizon proche ou un horizon lointain.

  - Plus γ est petit, plus l'horizon est proche (on se concentre sur les récompenses dans un horizon proche).
  - Autrement dit, de façon général, le facteur d'escompte est vu comme un taux d'inflation.

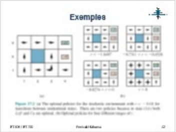
- Pour les problèmes avec un horizon infini, le facteur d'escompte assure la convergence de la somme infinie des récompenses.

  - Comme on vient de voir, il faut utiliser $0 \leq \gamma < 1$ pour que la somme des récompenses soient finie

Politique optimale

- Un politique π **domine** un politique π' si les deux conditions suivantes sont réunies:

  - $U^{\pi}(s) \geq U^{\pi'}(s)$ pour tout état s
  - $U^{\pi}(s) > U^{\pi'}(s)$ pour au moins un s



- Un politique est **optimale** si elle n'est pas dominée par une autre
  - il peut y avoir plusieurs politiques optimales, mais elles ont tous la même valeur
  - on peut avoir deux politiques **incomparables** (aucun ne domine l'autre)
    - » la dominance induit une fonction d'ordre partiel sur les politiques

- Deux algorithmes différents pour le calcul des politiques optimales:
  - **itération par valeurs** (***value iteration***)
  - **itération par politiques** (***policy iteration***)

Équations de Bellman

- Les **équations de Bellman** nous donnent l'utilité d'un état (c.à-d., l'utilité des politiques optimales exécutées à partir d'un état)

$$U(s) = \max_{a \in A(s)} \sum_{s' \in S} P(s' | s,a) \left[R(s,a,s') + \gamma\, U(s') \right]$$

- Si nous pouvons calculer *U*, nous pourrons calculer un plan optimal aisément: il suffit de choisir dans chaque état *s* l'action qui maximise *U*(*s*)

$$\pi^*(s) = \operatorname{argmax}_{a \in A(s)} \sum_{s' \in S} P(s' | s,a) \left[R(s,a,s') + \gamma\, U(s') \right]$$

Fonction action-utilité

- La fonction action-utilité (***Q-function***) est donnée par

$$
\begin{aligned}
Q(s,a) &= \sum_{s' \in S} P(s'|s,a)\,[\,R(s,a,s') + \gamma\, U(s')\,] \\
&= \sum_{s' \in S} P(s'|s,a)\,[\,R(s,a,s') + \gamma \max_{a' \in A(s')} Q(s',a')\,]
\end{aligned}
$$

- On a donc

$$U(s) = \max_{a \in A(s)} Q(s,a)$$

- Si nous pouvons calculer *Q(s,a)*, pour calculer un plan optimal il suffit de choisir dans chaque état *s* l'action qui maximise *Q(s,a)*

$$\pi^*(s) = \operatorname*{argmax}_{a \in A(s)} Q(s,a)$$

Algorithme *Value Iteration*

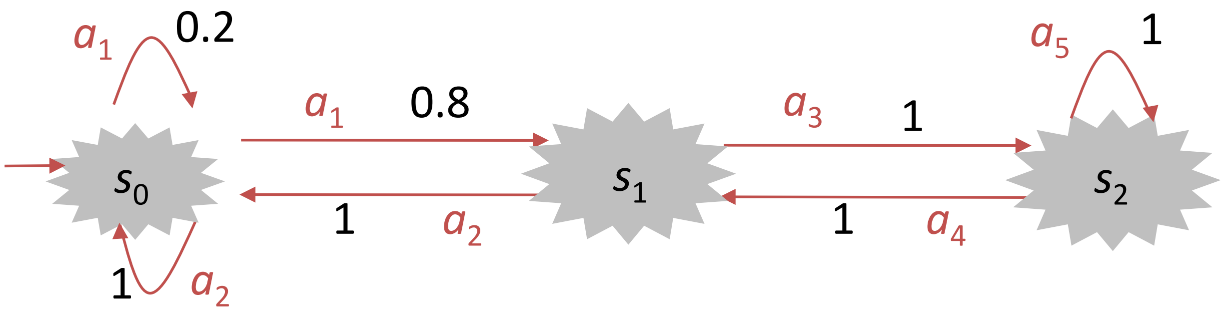
1. Initialiser $U(s)$ à 0 pour chaque état s.
2. Répéter (jusqu'à ce que le changement en U soit négligeable).
   I. pour chaque état s calculer:

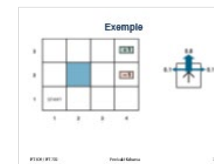
      $U'(s) = \max_a Q(s,a)$

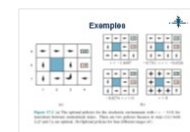
   II. si $\Sigma_{s \in S}|U(s) - U'(s)| \leq$ tolérance, quitter
   III. $U \leftarrow U'$
3. Dériver le plan optimal en choisissant **la meilleure action *a*** pour chaque état s
   I. $\pi(s) = \text{argmax}_a Q(s,a)$

- En mots, on choisit l'action qui **maximise l'espérance** des sommes de récompenses futures
- Complexité:
  - $(O(|S|^4 |A|^2)$ [Kaelbling, 1996]
  - Polynomial pourvu que le nombre d'itérations pour une politique ε-optimale est polynomial [*Littman, Dean, Kaelbling, UAI-95*] (chaque itération est $O(|S| |A|^2)$)

Exemple de MDP

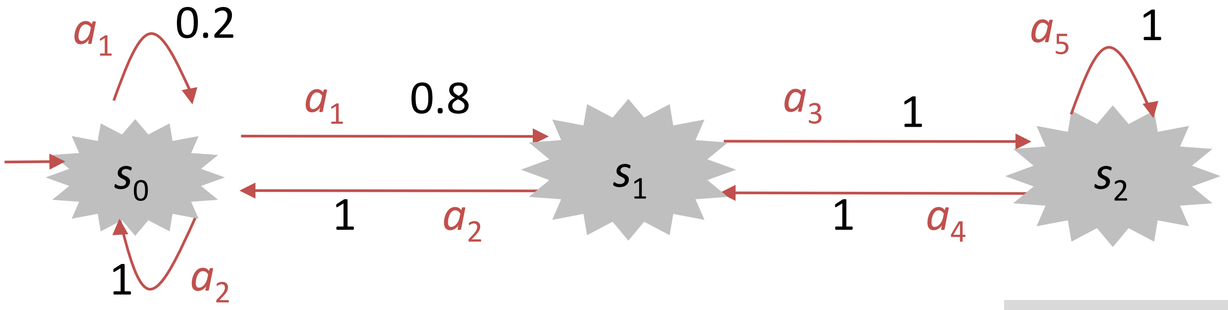






- MDP à 3 états: $S = \{s_0, s_1, s_2\}$
- But: s_2
- Le but (atteindre s_2) est exprimé par la fonction de récompense:
  - $R(s,a,s') = 0$ si $s' = s_0$ ou $s'=s_1$
  - $R(s,a,s') = 1$ pour s_2
- Le facteur d'escompte est $\gamma=0.5$

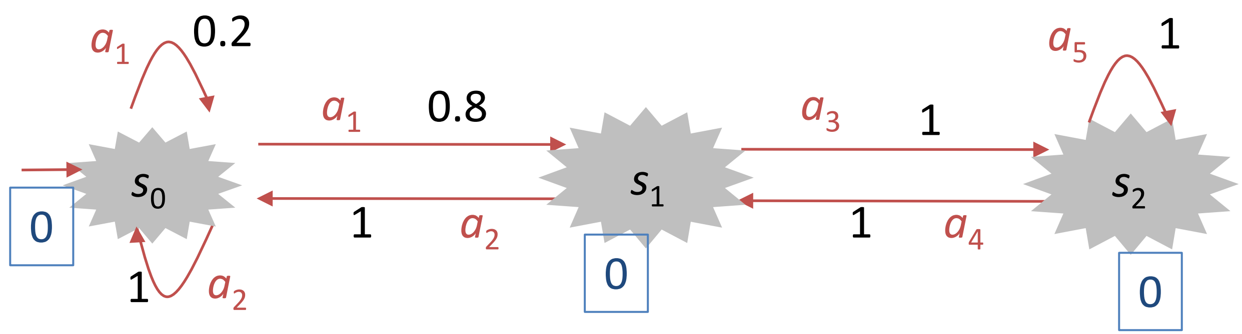
Exemple de MDP



$R(s,a,s') = 0$ si $s' = s_0$ ou $s' = s_1$
$R(s,a,s') = 1$ pour s_2

- *Us)*: utilité actuelle l'état *s*
- U'(s): nouvelle utilité de l'état s
  - $U'(s) = \max_a Q(s,a)$
- Notons $u_i = U(s_i)$

Value iteration: initialisation



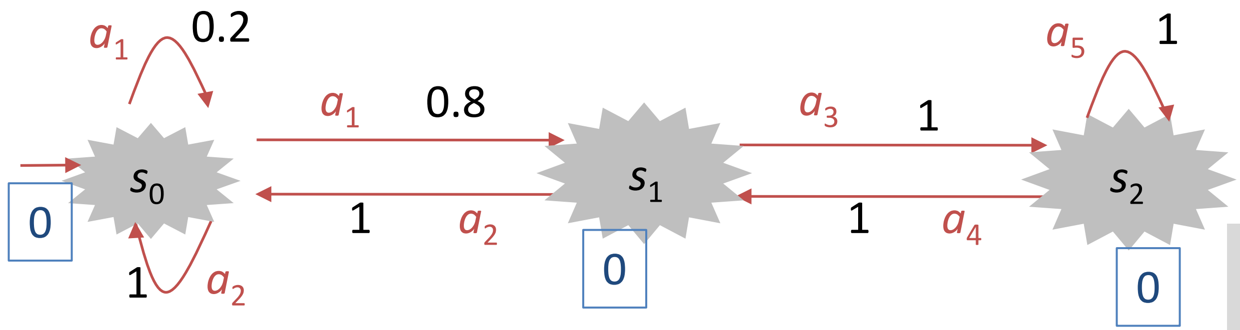
$R(s,a,s')$ = 0 si s'= s_0 ou s'=s_1
$R(s,a,s')$ = 1 pour s_2

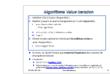
- Valeurs initiales fixées à 0:

  $u_0 = 0$
  $u_1 = 0$
  $u_2 = 0$

- Sur la figure, les valeurs U des états sont les étiquettes en bleu

***Value iteration*: itération #1**





$R(s,a,s') = 0$ si $s' = s_0$ ou $s' = s_1$
$R(s,a,s') = 1$ pour s_2

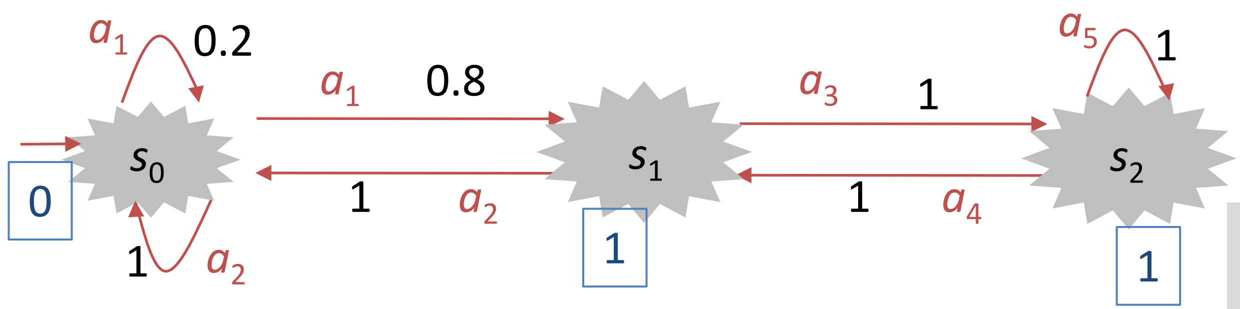
- Mise à jour droite-gauche des valeurs

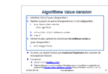
$$u'_0 \leftarrow \max\{\ 0.2*[0 + 0.5u_0] + 0.8*[0+0.5u_1],\ 0.5u_0\ \} = \max\{\ 0,\ 0\} = 0$$
$$u'_1 \leftarrow \max\{\ 1*[0+ 0.5u_0],\ 1*[1+ 0.5u_2]\} = \max\{\ 0,\ 1\} = 1$$
$$u'_2 \leftarrow \max\{\ 1*[0+ 0.5u_1],\ 1*[1+ 0.5u_2]\} = \max\{\ 0,\ 1\} = 1$$

- Les nouvelles valeurs sont $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$

$$Q(s,a) = \sum_{s' \in S} P(s'|s,a)\ [\ R(s,a,s') + \gamma\ U(s')\ ]$$

Value iteration: itération #2





$R(s,a,s') = 0$ si $s' = s_0$ ou $s' = s_1$
$R(s,a,s') = 1$ pour s_2

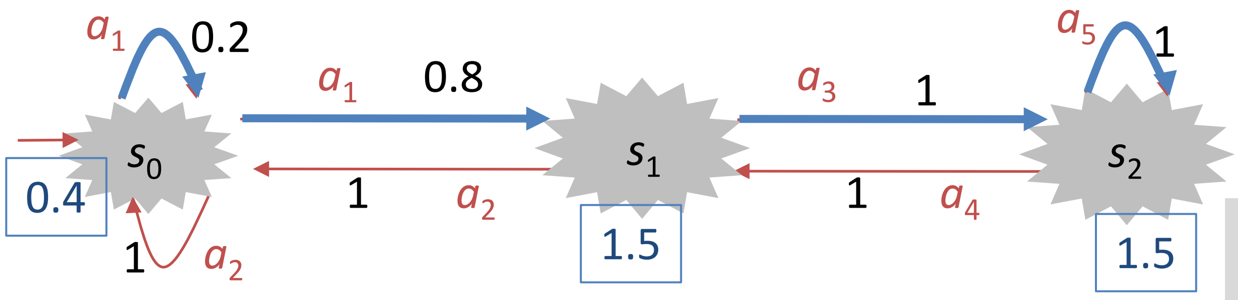
- Mise à jour droite-gauche des valeurs

$u'_0 \leftarrow \max\{ 0.2*[0 + 0.5u_0] + 0.8*[0+0.5u_1], u_0 \} = \max\{ 0.4, 0\} = 0.4$
$u'_1 \leftarrow \max\{ 1*[0+ 0.5u_0], 1*[1+ 0.5u_2]\} = \max\{ 0, 0\} = 1.5$
$u'_2 \leftarrow \max\{ 1*[0+ 0.5u_1], 1*[1+ 0.5u_2]\} = \max\{ 0.5, 1.5\} = 1.5$

- Les nouvelles valeurs sont $u_0 = 0.4$, $u_1 = 1.5$, $u_2 = 1.5$

$$Q(s,a) = \sum_{s' \in S} P(s'|s,a) [R(s,a,s') + \gamma U(s')]$$

Value iteration: itération #2



$R(s,a,s') = 0$ si $s' = s_0$ ou $s' = s_1$
$R(s,a,s') = 1$ pour s_2

$$\pi(s_0) = \underset{a}{\operatorname{argmax}}\{Q(s_0,a_1,s_1),\ Q(s_0,a_2,s_0)\} = \underset{a}{\operatorname{argmax}}\ \{0.2*[0+0.5u_0] + 0.8*[0+0.5u_1],\ 1*[0+0.5u_0]\}$$

$$= \underset{a}{\operatorname{argmax}}\{0.2*0.5*0.4+0.8*0.5*1.5,\ 0.5*0.4\} = \underset{a}{\operatorname{argmax}}\{0.64,\ 0.2\} = a_1$$

$$\pi(s_1) = \underset{a}{\operatorname{argmax}}\{Q(s_1,a_2,s_0),\ Q(s_1,a_3,s_2)\} = \underset{a}{\operatorname{argmax}}\{0.5u_0,\ 1+0.5u_2\} = \underset{a}{\operatorname{argmax}}\{0.2,\ 1.75\ \} = a_3$$

$$\pi(s_2) = \underset{a}{\operatorname{argmax}}\{Q(s_2,a_4,s_2),\ Q(s_2,a_5,s_2)\} = \underset{a}{\operatorname{argmax}}\{0.5u_1,\ 1+0.5u_2\ \} = \underset{a}{\operatorname{argmax}}\{0.75,\ 1.75\} = a_5$$

$$Q(s,a) = \sum_{s' \in S} P(s'|s,a)\ [\ R(s,a,s') + \gamma\ U(s')\ ]$$

Algorithme *Policy Iteration*

1. Choisir un plan arbitraire π’
2. Répéter jusqu’à ce que π devienne inchangée:
   I. π:= π’
   II. pour tout *s* dans *S*, calculer $U^\pi(s)$ en résolvant le système de |*S*| équations et |*S*| inconnues

$$U^\pi(s) = \Sigma_{s' \in S} P(s'|s, \pi(s)) \, [R(s, \pi(s), s') + \gamma \, U^\pi(s')]$$

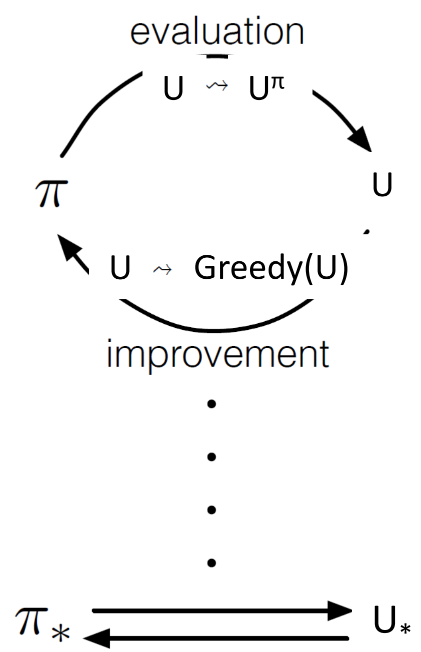
   III. pour tout *s* dans *S*

$$a^* = \underset{a \in A(s)}{\text{argmax}} \, Q(s,a)$$

si $Q(s,a^*) > Q(s,\pi(s))$ alors $\pi'(s) := a^*$ sinon $\pi'(s) := \pi(s)$

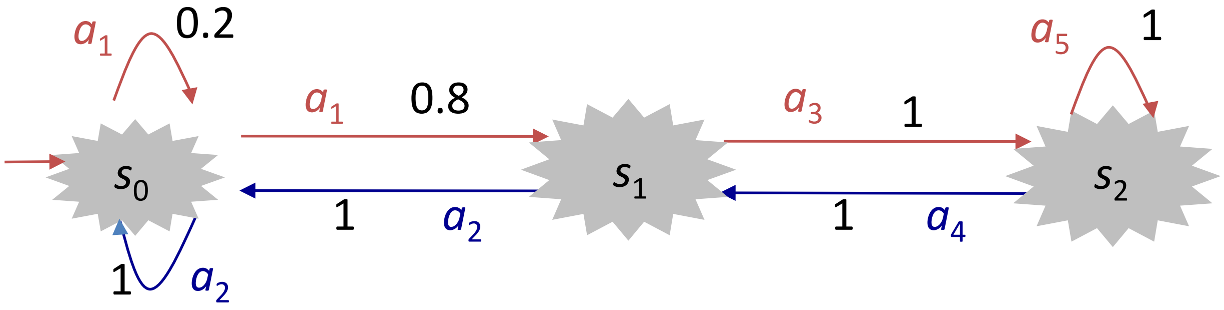
3. Retourne π

Generalized Policy Iteration (GPI)



- Converge en temps polynomial pourvu que le nombre d’itérations pour une politique ε-optimale est polynomial [*Littman, Dean, Kaelbling, UAI-95*]:
  - Chaque itération (calcul de la valeur d’un plan) est $O(|S|^3)$
  - Le nombre d’itérations est $O(|S| \, |A|^2)$

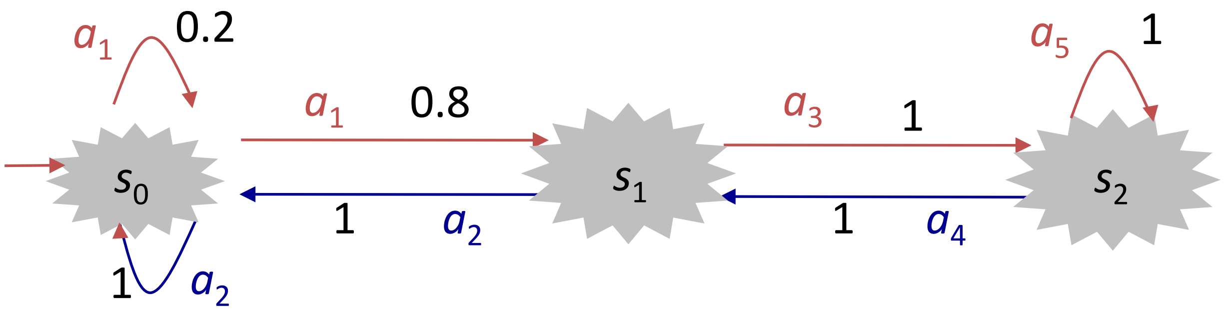
Policy iteration: initialisation

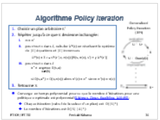


- Plan initial choisi arbitrairement:

$$\pi' = \{ s_0 \rightarrow a_2,$$
$$s_1 \rightarrow a_2,$$
$$s_2 \rightarrow a_4 \}$$

Policy iteration: itération #1





I. $\pi = \pi'$

II. Équations: u_0=1*[0+0.5u_0];
u_1=1*[0+0.5u_0];
u_2=1*[0+0.5u_1]

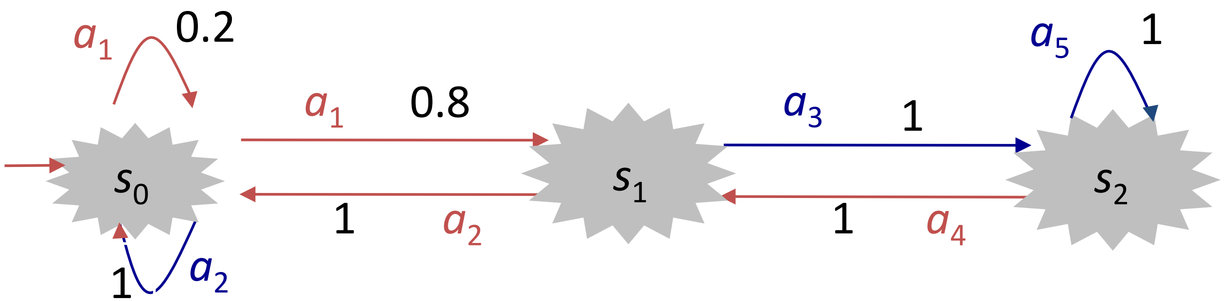
Solution: u_0=0, u_1=0, u_2=0

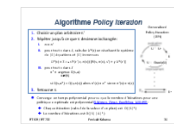
III. $s_0 \rightarrow$ Q(s_0,a_1)=0.2*[0+0.5*u_0]+ 0.8*[0+0.5*u_1] = Q(s_0,a_2) = 0 ne change pas
$s_1 \rightarrow$ Q(s_1,a_3)=1*[1+0.5*u_2] = 1 > Q(s_1,a_2) = 0; **change**
$s_2 \rightarrow$ Q(s_2,a_5)= 1*[1+0.5*u_2] = 1 > Q(s_2,a_4) = 0; **change**

$\pi' = \{ s_0 \rightarrow a_2 , s_1 \rightarrow a_3 , s_2 \rightarrow a_5 \}$

$U^{\pi}(s) = \Sigma_{s' \in S} P(s'|s, \pi(s)) [R(s, \pi(s), s') + \gamma U^{\pi}(s')]$

Policy iteration: itération #2





I. $\pi = \pi'$

II. Équations: $u_0=1*[0+0.5*u_0]$;
$u_1=1*[1+*0.5u_2]$;
$u_2=1*[1+*0.5u_2]$

Solution: $u_0=0$, $u_1=2$, $u_2=2$

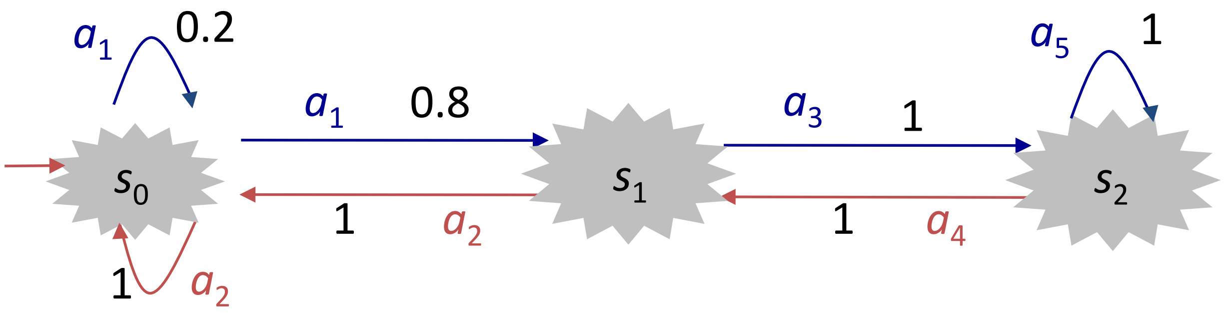
III. $s_0 \rightarrow Q(s_0,a_1)= 0.2*[0+0.5*u_0]+ 0.8*[0+0.5*u_1] =0.8 > Q(s_0,a_2)=0$ **change**
$s_1 \rightarrow Q(s_1,a_2)=1*[0+0.5*u_0] = 0 < Q(s_1,a_3)=2;$ ne change pas
$s_2 \rightarrow Q(s_2,a_4)=1*[0+0.5*u_1] = 1 < Q(s_2,a_5)=2;$ ne change pas

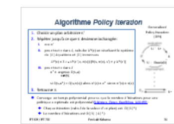
$\pi' = \{ s_0 \rightarrow a_1 , s_1 \rightarrow a_3 , s_2 \rightarrow a_5 \}$, c-à-d. Π

- Solution finale: π

$$U^\pi(s) = \Sigma_{s' \in S} P(s'|s, \pi(s)) [R(s, \pi(s), s') + \gamma U^\pi(s')]$$

Policy iteration: itération #3





I. $\pi = \pi'$

II. Équations: $u_0=0.2*[0+0.5*u_0] + 0.8*[0+0.5*u_1]$

$u_1=1*[1+*0.5u_2];$

$u_2=1*[1+*0.5u_2]$

Solution: $u_0=4/45$, $u_1=2$, $u_2=2$

III. $s_0 \rightarrow Q(s_0,a_2)=1*[0+0.5*u_0] = 2/45 < Q(s_0,a_1)=4/45$ ne change pas

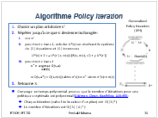
$s_1 \rightarrow Q(s_1,a_2)= 1*[0+0.5*u_0] = 2/45 < Q(s_1,a_3)= 2;$ ne change pas

$s_2 \rightarrow Q(s_2,a_4)= 1*[0+0.5*u_1] = 1 < Q(s_2,a_5)= 2;$ ne change pas

$\pi' = \{ s_0 \rightarrow a_2 , s_1 \rightarrow a_3 , s_2 \rightarrow a_5 \}$

$U^\pi(s) = \Sigma_{s' \in S} P(s'|s, \pi(s)) [R(s, \pi(s), s') + \gamma U^\pi(s')]$

Modified Policy Iteration



- À l'étape II de l'algorithme, on lieu de calculer U^π de façon exacte par la résolution du système d'équations, on l'approxime avec l'itération par valeur simplifiée.
- L'**itération par valeur simplifiée (*simplified value-iteration*)** est un algorithme général pour approximer la valeur d'une politique donnée (dans ce cas-ci la politique π à l'étape II) par un nombre fini d'étapes de mises à jour de *value-iteration*

Répéter N fois

Pour chaque état s

$$U^\pi(s) = \Sigma_{s' \in S} P(s'|s, \pi(s)) \, [R(s, \pi(s), s') + \gamma \, U^\pi(s')]$$

  - À l'infini, on obtient U^π
  - C.-à-d., plus N est grand, plus on se rapproche de U^π
  - *Le N est choisi de façon empirique*

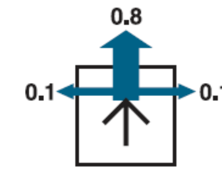
Asynchronous Policy Iteration

- À chaque iteration de *policy iteration*
  - Choisir un sous ensemble d’états (au lieu de tous les états du MDP)
  - Appliquer à ce sous-ensemble,
    - » Soit une évaluation approximative de la politique (par *Simplified Value-Iteration*)
    - » Soit une évaluation exacte par résolution du système d’équations

Au de là de MDP …

- Les processus de décision markoviens sont attrayants parce qu'ils offrent un cadre de planification qui combine raisonnement probabiliste, théorie de la décision et optimisation avec élégance
- Les algorithmes *value-iteration* et *policy-iteration* ne sont pas efficaces (espace d'états trop grand). Il existe des approches approximatives par échantillonnage et des approches hiérarchiques.
- Ces algorithmes supposent que nous avons un modèle. Ce sont des algorithmes de planification.
- Les algorithmes d'apprentissage par renforcement sont fondés sur ces concepts pour apprendre la politique à partir d'interactions avec l'environnement

Exemples



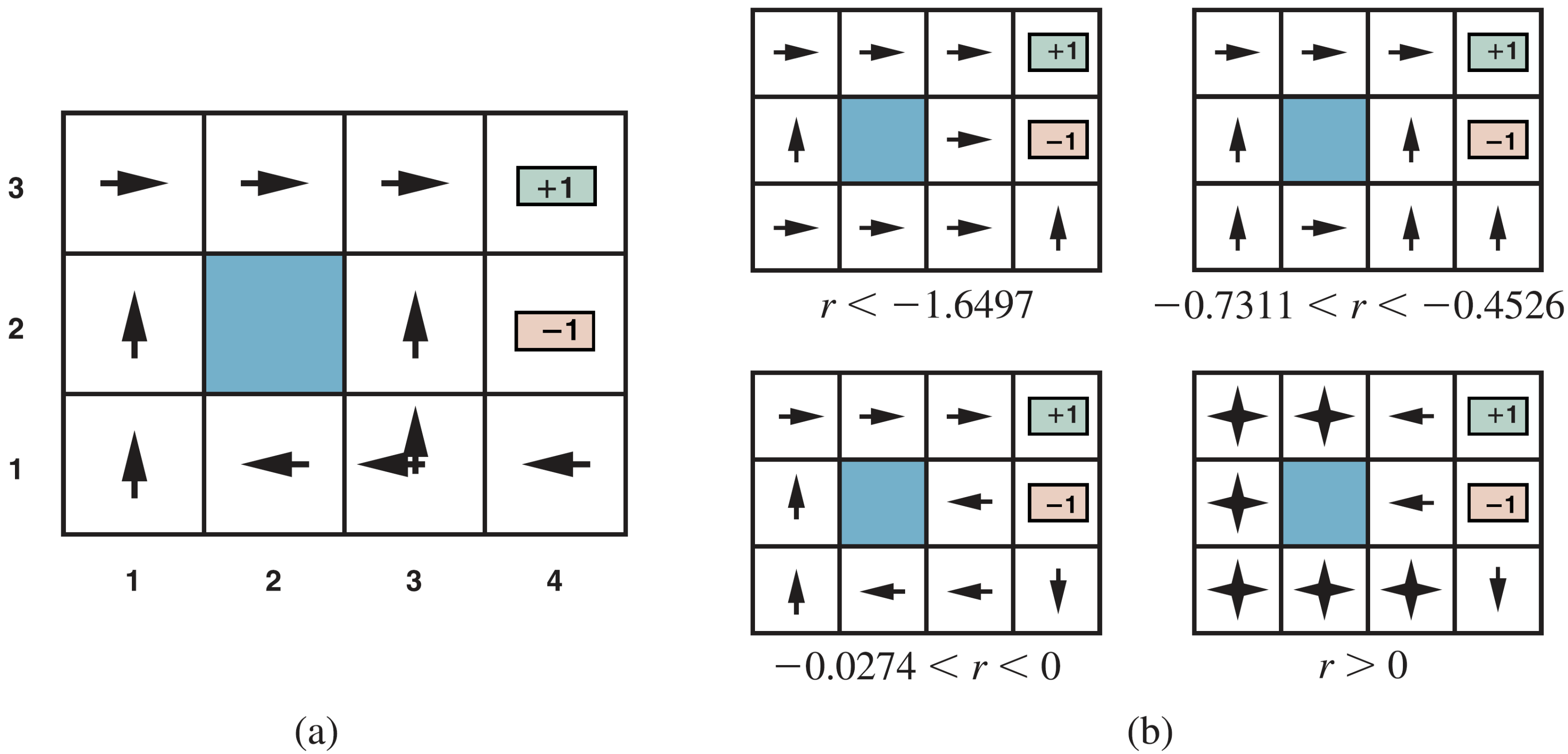


Figure 17.2 (a) The optimal policies for the stochastic environment with $r = -0.04$ for transitions between nonterminal states. There are two policies because in state (3,1) both *Left* and *Up* are optimal. (b) Optimal policies for four different ranges of r.

Rappel: systèmes d'équations linéaires

- Soit le système d'équations:
  $u_0 = 0 + 0.5 * (0.2*u_0+0.8*u_1);$
  $u_1 = 0 + 0.5 * (1*u_2);$
  $u_2 = 1 + 0.5 * (1*u_2)$
- En mettant toutes les variables à droite, on peut l'écrire sous la forme:
  $0 = -0.9\, u_0 + 0.4\, u_1 \qquad (1)$
  $0 = -u_1 + 0.5\, u_2 \qquad (2)$
  $-1 = -0.5\, u_2 \qquad (3)$
- De l'équation (3), on conclut que $u_2 = -1 / -0.5 = 2$
- De l'équation (2), on conclut que $u_1 = 0.5\, u_2 = 1$
- De l'équation (1), on conclut que $u_0 = 0.4\, u_1 / 0.9 = 4/9$

Rappel: systèmes d'équations linéaires

- Soit le système d'équations:

  $u_0 = 0 + 0.5 * (0.2*u_0+0.8*u_1);$
  $u_1 = 0 + 0.5 * (1*u_2);$
  $u_2 = 1 + 0.5 * (1*u_2)$

- En mettant toutes les variables à droite, on peut l'écrire sous la forme:

  $0 = -0.9\, u_0 + 0.4\, u_1$ (1)
  $0 = -u_1 + 0.5\, u_2$ (2)
  $-1 = -0.5\, u_2$ (3)

- Approche alternative: on écrit sous forme matricielle b = A u, où

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & 0.4 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Rappel: systèmes d'équations linéaires

- Soit le système d'équations:
  $u_0 = 0 + 0.5 * (0.2*u_0+0.8*u_1)$;
  $u_1 = 0 + 0.5 * (1*u_2)$;
  $u_2 = 1 + 0.5 * (1*u_2)$
- En mettant toutes les variables à droite, on peut l'écrire sous la forme:
  $0 = -0.9\, u_0 + 0.4\, u_1$ (1)
  $0 = -u_1 + 0.5\, u_2$ (2)
  $-1 = -0.5\, u_2$ (3)
- Suffit alors d'inverser A pour obtenir $v = A^{-1}\, b$
  - on peut utiliser une librairie d'algèbre linéaire (ex.: Numpy en Python):

```
>>> A = numpy.array([[-0.9,0.4,0],[0,-1,0.5],[0,0,-0.5]])
>>> b = numpy.array([0,0,-1])
>>> Ainv = numpy.linalg.inv(A)
>>> u = numpy.dot(Ainv,b)
>>> print u
[ 0.44444444  1.         2.        ]
```